Л.В. Ланина

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЕДИЦИНСКИХ ВУЗОВ

Астрахань – 2015

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл

Количественное описание сложных изменяющихся процессов жизнедеятельности с помощью элементарной математики невозможно, поскольку соответствующие математические величины, используемые для этой цели, должны сами обладать способностью к «движению». Высшая математика, в отличие от элементарной, оперирует зависимостями и величинами, подверженными изменениям, происходящим по определенным законам. Величиной, определяющей темп изменения функциональных зависимостей в высшей математике, является **производная функции**.

Величина y **называется функцией переменной величины** x**, если каждому из тех значений, которые может принимать** x**, соответствует одно или несколько определенных значений** y**. При этом переменная величина** x **называется аргументом.**

Разность между двумя значениями аргумента называется приращением аргумента и обозначается символом Δx. Приращение может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Если первое значение аргумента обозначить через x_1, а второе через x_2, то

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Разность между двумя значениями функции называется **приращением функции**:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

Вычисление приращения любой функции $y = f(x)$ удобно проводить в следующем порядке:

1. Даем аргументу x функции $y= f(x)$ приращение Δx, получаем точку $x+\Delta x$.

2. Находим значение функции в точке $x+\Delta x$:

$$y+\Delta y= f(x+\Delta x)$$

3. Из значения функции $y+\Delta y$ вычитаем ее значение в точке x и находим приращение функции:

$$\Delta y= f(x+\Delta x) - f(x).$$

Пример 1. Начальное значение аргумента $x = 3$, приращение аргумента $\Delta x= -2$. Найти соответствующее приращение Δy функции $y = x^2$.

Решение.

Так как $x_1 = 3$ и $x_2 - x_1 = - 2$, то $x_2 = 1$. Функция $y = x^2$ принимает сначала значение $y_1 = 3^2 = 9$, а затем $y_1 = 1^2 = 1$.

Приращение функции есть $\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - 9 = - 8$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Это отношение показывает, во сколько раз в данном интервале $(x,x+\Delta x)$ приращение функции больше приращения аргумента, т.е. это отношение есть средняя скорость изменения функции y относительно аргумента x в интервале $(x, x+\Delta x)$.

Переходя к пределу $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, получим величину, равную скорости изменения функции относительно аргумента в точке x. Этот предел $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и называется производной от функции y (или просто производной функции) по аргументу x.

Производной функции *y*= *f (x)* при данном значении аргумента *x* называется предел отношения приращения функции *Δy* к приращению аргумента *Δx*, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Производная обозначается одним из символов: y'_x (читается «игрек штрих по икс»), y', $\frac{dy}{dx}$(«де игрек по де икс»), $f\,'(x)$ («эф штрих от икс»). Пользуясь обозначением производной, можно записать:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Таким образом, производная от функции *y* по аргументу *x* есть мгновенная скорость изменения функции относительно аргумента.

Следует иметь в виду, что функции и аргументы могут быть самыми различными. В школьном курсе объяснялось, что если аргументом является время, а функцией перемещение тела s=s(t), то производная $\frac{\partial s}{\partial t} = v$ есть скорость, если аргумент – время, а функция скорость $v = v(t)$, то производная $\frac{\partial v}{\partial t} = a$ есть ускорение, т.е. величина, которая показывает, насколько быстро изменяется скорость с изменением времени. Но это лишь частные случаи использования производных.

В медицинской кибернетике, например, определяется так называемый коэффициент чувствительности R_u к лечебному воздействию, который есть производная от параметра Р по лечебному воздействию U: $R_u = \frac{dP}{dU}$, т.е. этот

коэффициент показывает, насколько быстро меняется параметр организма при увеличении лечебного воздействия и т. д.

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ задана графически (рисунок 1). Возьмем на кривой точку $A(x, y)$ и дадим аргументу x приращение Δx.

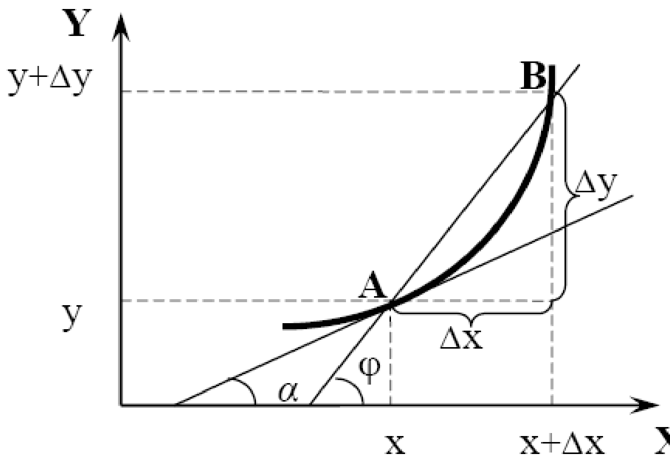

Рис. 1. Геометрический смысл производной

В результате функция будет иметь значение $y + \Delta y =$ $= f(x+\Delta x)$ и получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Проведем секущую АВ и обозначим угол наклона секущей к оси Ox через φ. Из рисунка 1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi \qquad (1)$$

При *Δx→0* точка B перемещается вдоль кривой, приближаясь к точке А.

Секущая поворачивается вокруг точки А и превращается в касательную к графику функции в точке А, имеющей угол наклона α к оси *Ox*.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$, а поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

Учитывая равенство (1), получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha \text{ и } y' = \mathrm{tg}\ \alpha.$$

Производная функции равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке, в которой находят производную.

Общее правило дифференцирования

Нахождение производной от функции называется ее **дифференцированием**, чтобы найти производную функции необходимо:

1. Придать аргументу x функции $y = f(x)$ приращение Δx и найти новое, наращенное значение функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

2. Найти приращение функции:

$$(y + \Delta y) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

3. Найти отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. Найти предел этого отношения при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{y}'$$

Пример 2. Пользуясь данной схемой, найти производную функции $y=x^2$.

Решение.

1. Наращенное значение функции:

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^2$$

2. Приращение функции: $\Delta y=(x+\Delta x)^2 - x^2$

$$\Delta y = x^2+2x\Delta x +(\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x +(\Delta x)^2$$

3.Отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

4. Производная функции: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Однако применение общего правила дифференцирования к функциям различного вида – процесс трудоемкий и сложный. Достаточно знать производные от основных функций, полученные по общему правилу.

Таблица производных функций

№	ФУНКЦИИ		ПРОИЗВОДНЫЕ
1	Постоянная величина	$y = C \quad C = const$	$y' = 0$
2	Степенная функция	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
3	Показательная функция	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
4		$y = e^x$	$y' = e^x$
5	Логарифмическая функция	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
6		$y = \ln\lvert x\rvert$	$y' = \frac{1}{x}$
7	Тригонометрические функции	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
8		$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
9		$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10		$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
	Обратные тригонометрические функции	arcsinx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		arcosx	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
		arcctgx	$-\frac{1}{1+x^2}$
ЧАСТНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ			
11	Алгебраическая сумма функций	$y = u \pm v$, где $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$	$y'_x = u'_x \pm v'_x$
12	Произведение двух функций	$y = uv$	$y'_x = u'_x v + uv'_x$
13		$y = cu$, где $c = const$	$y'_x = cu'_x$
14	Частное двух функций	$y = \frac{u}{v}$	$y'_x = \frac{u'_x v - uv'_x}{v^2}$

Нахождение производных по основным формулам дифференцирования

Пример 3. $y = x^2 - 5$

Решение.

По правилу дифференцирования алгебраической суммы функций получаем: $y' = (x^2 - 5)' = (x^2)' - 5'$.

Применяя формулы (2) и (1), получим: $y' = 2x + 0 = 2x$.

Пример 4. $y = 3tgx + \frac{1}{4}2^x - ctgx$

Решение.

По формуле (15) $y' = (3tgx)' + (\frac{1}{4}2^x)' - (ctgx)'$

По формуле (17) $y' = (3tgx)' + \frac{1}{4}(2^x)' - (ctgx)'$

Используя формулы (9), (3), и (10), получим:

$$y' = 3\frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{4}2^x\ln 2 + \frac{1}{sin^2x}.$$

Пример 5. $y = 2e^x\cos x$

Решение.

Так как постоянный множитель входит множителем в производную (13): $y' = 2(e^x\cos x)'$.

По правилу дифференцирования произведения функций (16) и формулам (4), (8)

$$y' = 2[(e^x)'\cos x + e^x(\cos x)'] \; y' = 2[e^x\cos x - e^x(\sin x)]$$

Пример 6. $y = \frac{e^x x^3}{lnx}$

Решение.

Применяем правило дифференцирования отношения функций (18):

$$y' = \frac{(e^x x^3)' \ln x - e^x x^3 (lnx)'}{(lnx)^2},$$

по правилу (16) и формулам (4), (2) и (6):

$$y' = \frac{(e^x x^3 + e^x 3x^2)\ln x - e^x x^3 \frac{1}{x}}{ln^2 x}.$$

§ 2. Производная сложной функции

Сложной функцией называется функция от функции. Пусть $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$, здесь x – независимая переменная, z – промежуточная функция аргумента x и одновременно аргумент функции y, т.е. $y = f\,[\varphi\,(x)]$.

Сложная функция дифференцируется по так называемому правилу цепочки:

Производная сложной функции равна произведению производной по промежуточной функции на производную промежуточной функции по независимому аргументу: $y'_x = y'_z z'_x$

Пример 1. $y = 4\sin(x2 +1)$

Решение.

Данную функцию можно представить в виде $y = 4sin\ z$, где $z = x^2 + 1$.

По правилу нахождения производной сложной функции и формулам (17), (7), (15) и (2) $y\ ' = 4(\sin z)'_z(x^2 + \ +1)'_x =$ $=4\cos(z)2x$ или $y' = 8x\cos(x^2 + 1)$.

Пример 2. $y = \sqrt{x - ctgx}$

Решение.

Освободимся от корня: $y = (x - ctgx)^{1/2}$.Данную функцию можно представить в виде $y = z^{1/}2$, где $z = (x -\quad - ctgx)$. По правилу нахождения производной сложной функции и формулам (2), (10), и (15):

$$y' = (z^{\frac{1}{2}})'_z (x - ctg\, x)'_x = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{sin^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - ctg\, x}} (1 + \frac{1}{sin^2 x})$$

Дифференцирование этой сложной функции можно записать иначе:

$$y' = \frac{1}{2} (\, x - ctg\, x)^{-\frac{1}{2}} (x - ctg\, x)'_x =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - ctgx}} (1 + \frac{1}{sin^2 x}).$$

Второй способ записи без особого обозначения промежуточной функции значительно проще. Этому способу записи и следует научиться при дифференцировании сложной функции.

Пример 3. $\boldsymbol{y = \frac{cosx}{2sin^2 x}}$

Решение.

По формулам (18), (8), (2), и (7).

$$y' = \frac{1}{2} \frac{(\cos x)'\, sin^2 x - \cos x\, (sin^2 x)'}{sin^4 x} =$$

$$=\frac{1}{2} (\frac{-\sin x sin^2 x - \cos x\; 2 \sin x (\sin x)'}{sin^4 x}).$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x\, sin^2 x - \cos x\, 2\sin x cos\, x}{sin^4 x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sin x\,(sin^2 x + 2cos^2 x)}{sin^4 x} =$$

$$= -\frac{1+\ cos^2 x}{2sin^3 x}$$

Пример 4. $y = x^2 e^{-sin\, x}$

Решение. Применяя правило дифференцирования (16), получим:$y' = (x^2)' e^{-\sin x} + x^2 (e^{-\sin x})'$.

По формулам (2), (4), (7) таблицы производных:

$y' = 2\, x e^{-\sin x} + x^2 (e^{-\sin x})(-\sin x)'_x =$

$= 2\, x e^{-\sin x} + x^2 (e^{-\sin x})(-\cos x) = x e^{-\sin x}(2 -$
$- x\cos x)$.

Производные второго и высших порядков

Производная $y' = f\,'(x)$ от функции $y = f\,(x)$в общем случае является функцией аргумента x и также может быть дифференцируема.

Производная от производной называется **производной второго порядка** или просто второй производной.

Производная от второй производной называется третьей производной. Производная от третьей производной называется четвертой производной и т.д.

Т.е. производная порядка n есть производная от производной порядка $(n - 1)$.

Вторая производная функции $y = f\ (x)$ обозначается одним из символов: y'' (читается: игрек два штриха); $\frac{d^2 y}{dx^2}$

(читается: де два игрек по де икс дважды); $f''(x)$ (читается: эф два штриха от икс). Третья производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов: y''' (читается: игрек три штриха); $f'''(x)$ (читается: эф три штриха от икс); $\frac{d^3y}{dx^3}$; $y^{(3)}$, $y^{(4)}$, … .

Производная порядка n есть производная от производной порядка $(n-1)$.

Эта производная обозначается одним из символов: $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$. Для обозначения последовательных производных приняты обозначения: y'', $y^{(3)}$, $y^{(4)}$, ...

Физический смысл второй производной: Если точка движется по прямой и задан ее закон движения $s = f(t)$, (s – путь, t – время), то ускорение точки равно второй производной от пути по времени:

$$V = s_t' = f'(t);\ a = v_t' = s_t'' = f''(t).$$

§ 3. Дифференциал функции и его геометрический смысл

С понятием производной теснейшим образом связано фундаментальное понятие математического анализа – дифференциал функции.

Дифференциал функции равен произведению производной функции на приращение ее аргумента:

$$dy = y'\Delta x \qquad (1)$$

Дифференциал аргумента x равен его приращению, т.е. $dx = \Delta x$. Тогда

$$dy = y'dx \qquad (2)$$

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал аргумента.

Формула (2) используется при вычислениях дифференциалов. Согласно определению производная функции $y = f(x)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Известно, что разность между переменной величиной (в данном случае это $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) и ее пределом ($y'$) есть величина бесконечно малая (α). Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$; отсюда

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x \qquad (3)$$

Приращение функции состоит из двух слагаемых $y' \Delta x$ и $\alpha \Delta x$, причем второе слагаемое ($\alpha \Delta x$), как произведение двух бесконечно малых (α – бесконечно малая величина по определению, а Δx – по условию) является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем Δx. Следовательно, слагаемым $\alpha \Delta x$ в равенстве (3) можно пренебречь по сравнению с $y' \Delta x$

$$\Delta y \approx y' \Delta x \qquad (4)$$

С учетом определения дифференциала – формула (1) – можно записать:

$$dy \approx \Delta y \qquad (5)$$

Дифференциал функции при малых $\boldsymbol{\Delta x}$ приблизительно равен приращению функции: $\boldsymbol{dy \approx \approx \Delta y}$.

Геометрический смысл дифференциала функции можно пояснить с помощью рисунка 2, на котором функция $y =$ $= f(x)$ задана графически.

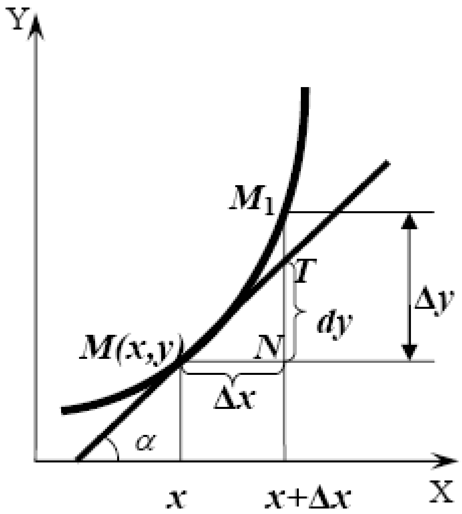

Рис. 2. Геометрический смысл дифференциала функции

Возьмем на графике точку М(x,y) и точку М$_1$($x+\Delta x$, $y+\Delta y$). Проведем касательную к графику в точке М. Производная от функции в точке М равна тангенсу угла наклона касательной: $y' = tg\alpha$. Из треугольника MTN

$$y' = \mathrm{tg}\alpha = \frac{TN}{\Delta x}.$$

По определению дифференциала (1):

$$dy = y'\Delta x = \frac{TN}{\Delta x}\Delta x = TN$$

Таким образом, **дифференциал функции** $y = f(x)$ **геометрически представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке с**

абсциссой *x* при переходе от точки касания к точке с абсциссой $x+\Delta x$.

Правила вычисления дифференциала

Таблица для вычисления дифференциалов основных элементарных функций получается из таблицы для вычисления производных этих функций путем умножения соответствующей производной на дифференциал независимой переменной *dx*.

Дифференциал произведения c=const на функцию **u**	$d(cu) = cdu$	(1)
Дифференциал алгебраической суммы функций	$d(u \pm v) = du \pm dv$	(2)
Дифференциал произведения функций	$d(uv) = udv + vdu$	(3)
Дифференциал частного двух функций	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$	(4)

Пример 1: Найти дифференциал функции $y = \ln(x^2+1)$.

Решение: $dy = \left[\ln(x^2+1)\right]'_x dx = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'_x dx =$

$= \frac{2x}{x^2+1} dx.$

§ 4. Частные производные. Понятие о полном дифференциале

Большинство процессов, протекающих в окружающей нас природе и жизни, подчинены законам, выражающим зависимость между несколькими переменными величинами, одна из которых функционально связана с остальными. Любая физиологическая характеристика (давление, вес, температура, и т.д.) является функцией многих переменных.

Пусть задана функция нескольких (например, трех) переменных $u = f\ (x,\ y,\ z)$.Для такой функции можно найти3частных производных по каждому из аргументов.

Частная производная функции по данному аргументу – это производная, взятая от функции в предположении, что остальные аргументы данной функции есть величины постоянные.

Частная производная по y обозначается одним из символов: $\frac{\partial u}{\partial y}$ (читается: де круглое **u** по де игрек круглое), $\frac{\partial f}{\partial y}$,$u'_y$, f'_y, а частная производная по z – одним из символов: $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, u'_z ,f'_z.

Пример 1: Найти частные производные функции $u = 3(x^2 + y)^5$.

Решение.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \cdot 5(x^2 + y)^{5-1}\,(x^2 + y)'_x$.

Здесь y =*const*, поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = 15(x^2 + y)^4\,(x^2 + 0)'_x =$
$= 15(x^2 + y)^4 \cdot 2x,$
$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \cdot 5(x^2 + y)^{5-1}\,(x^2 + y)'_y$, так как$x$=*const*, тогда

$\frac{\partial u}{\partial x} = 15(x^2 + y)^4\,(0 + 1)'_y = 15\,(x^2 + y)^4.$

Если функция зависит от нескольких (например, трех) *u*=*f*(*x*,*y*,*z*) ,то ее полный дифференциал равен:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz.$$

Полный дифференциал функции n переменных равенсумме n произведений частных производных по каждому из аргументов на дифференциал соответствующего аргумента.

Пример 2: Найти полный дифференциал функции u = $= \sqrt{x^2 + y^2}$

Решение.

Освободимся от корня: u = $(x^2 + y^2)^{1/2})$.

Частные производные:

$u'_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + y^2)'_x,$

$u'_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$u'_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + y^2)'_y,$

$$u'_y == \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y$$

Полный дифференциал:

$$du = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2xdx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ydy.$$

§ 5. Применение производных к исследованию функций

С помощью производной можно решить следующую задачу: задана функция, найти основные особенности поведения этой функции. Возрастание и убывание функции на отдельном интервале является существенной характеристикой поведения функции.

Если функция $f(x)$ дифференцируема и на интервале (a,b) ее производная положительна $f'(x)>0$, то функция возрастает на данном интервале. Если производная отрицательна $f'(x)<0$, то на интервале (a,b) функция $f(x)$ убывает.

Экстремум – значение функции в точке.

Точками экстремума являются точки максимума и минимума:

- Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если для любой $x \neq x_0$ в некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x_0)>f(x)$.
- Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если для любой $x \neq x_0$ в некоторой окрестности x_0выполняется неравенство $f(x_0)<f(x)$.

Необходимое условие существования экстремума. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x)=0$.

Первое достаточное условие существования. Пусть функция *f(x)* дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в точке.

Если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция *f(x)* имеет максимум. Если же при переходе через точку x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой минимума.

Второе достаточное условие существования экстремума. Если в точке x_0 первая производная функции равна нулю $f'(x)=0$, а вторая производная отлична от нуля $f''\neq 0$, то x_0 – точка экстремума. Причем: x_0 - точка минимума, если $f''>0$, x_0 - точка максимума, если $f''<0$.

Условия выпуклости и точки перегиба графика функции

График функции $y=f(x)$ имеет на интервале выпуклость, направленную вниз, если он расположен не ниже любых касательных, проведенных к графику функции. Выпуклость вверх будет, если график функции на расположен не выше любых касательных.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''\geq 0$, то функция выпукла вниз на этом интервале. Если же $f''\leq 0$, то она выпукла вверх на данном интервале.

Точка перегиба – это точка, при переходе через которую функция меняет направление выпуклости.

Асимптоты – это прямые, к которым неограниченно приближается график функции.

Асимптоты бывают вертикальные, горизонтальные, наклонные.

Схема исследования графика функции

1) Найти область определения функции.

2) Определить четность, нечетность данной функции.

Четная функция симметрична относительно оси $Oy(f(-x)=f(x))$, нечетная – относительно начала координат xOy $(f(-x)=-f(x))$.

3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. решить уравнения $x=0$, $y=0$. Найти точки разрыва.

4) Найти точки возможного экстремума $(y'(x)=0)$.

5) Найти критические точки $(y''(x)=0)$.

6) Определить участки монотонности (возрастания, убывания), точки экстремума, направление выпуклости графика (вверх, вниз), точки перегиба.

7) Определить максимум и минимум функции.

8) Найти асимптоты.

9) Построить график функции.

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГОИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Первообразная функции и неопределенный интеграл

Действие, обратное дифференцированию, называется интегрированием. Путем интегрирования, зная производную или дифференциал функции, можно найти саму функцию (восстановить функцию). При этом искомая функция называется первообразной для данной функции.

Первообразной функцией по отношению к данной функции $y=f(x)$ **называется всякая функция** F(x) **производная от которой равна данной функции, т.е.** $F(x)' = f(x)$.

Для данной функции $y=f$ (x) первообразных функций бесчисленное множество, так как любая функция, отличающаяся от $F(x)$ на постоянную величину, так же является первообразной, т.е.

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Совокупность первообразных F(x)+C для данной функции $f(x)$ **или для данного дифференциала** $f(x)dx$ **называется неопределенным интегралом функции** $f(x)$ **и обозначается символом:**

$$\int f(x)dx, \text{ т.е. } \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс const:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$$

5. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))dx =$$

$$= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)dx$$

Таблица основных интегралов

$\int a\cdot dx = ax + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	

§ 2. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование − это способ интегрирования, при котором данный интеграл путем алгебраических и тригонометрических преобразований и по свойствам 4 и 5 приводится к алгебраической сумме табличных интегралов.

Пример 1. $\int(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{x})dx$

Решение.

В данном примере под знаком интеграла дана алгебраическая сумма функций. Используя свойства неопределенного интеграла 4 и 5, и учитывая, что $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ по формулам таблицы основных интегралов получим:

$$\int (1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{x})dx = \int dx + 2\int x^{\frac{1}{3}}\,dx - 4\int \frac{dx}{x} =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 4\ln|x| + C =$$

$$= x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 4\ln|x| + C$$

Примечание. Хотя каждое промежуточное интегрирование дает свою произвольную постоянную С, в окончательном результате принято ставить только одну постоянную, так как алгебраическая сумма произвольных постоянных будет также произвольной постоянной.

Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Этот метод заключается в такой замене переменной и последующей подстановке, которая свела бы интеграл к табличному.

Пример 2. $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$

Решение. Введем новую переменную по формуле: $z = 1 + x^2$. Чтобы выразить dx через dz возьмем дифференциалы от обеих частей равенства: $dz = 2xdx$. Производим подстановку в интеграл:

$$\int \frac{2xdx}{1+\ x^2} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C$$

Произведем обратную замену: $z = 1 + x^2$. Получим:

$$\int \frac{2xdx}{1+\ x^2} = \ln|z| + C = \ln|1+\ x^2| + C$$

Пример3.

$$\int cos^3x \cdot sinxdx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \end{matrix} \right| = \int -t^3\, dt$$

$$= -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{cos^4x}{4} + C$$

Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = udv + vdu, \qquad (1)$$

получается формула дифференцирования по частям, если взять интегралы от обеих частей равенства (1).

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

Учитывая свойство неопределенного интеграла (3), получим:

$$uv = \int udv + \int vdu.$$

Следовательно,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2)$$

Пример 4.

$$\int xsinxdx$$

Решение.

Принимаем $u = x$, $dv = sinxdx$, тогда

$$v = \int dv = \int sinxdx = -cosx$$

Используяформулу (2), получим

$\int xsinxdx = -xcosx - \int(-cosx)dx = -xcosx + \int cosxdx = -xcosx + sinx + C$.

§ 3. Определенный интеграли его геометрический смысл

Понятие определенного интеграла широко используется в математике и прикладных науках. С помощью определенного интеграла вычисляются площади, ограниченные кривыми, средние значения функций, скорость, моменты инерции и т. д.

Интегральная сумма. Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a,b]$ ($a<b$) оси Ox задана непрерывная, положительная функция $f(x)$ (см. рис. 3). Выберем на оси X точки а и b и восстановим из них перпендикуляры до пересечения с кривой. Фигура, ограниченная графиком функции, перпендикулярами и осью X называется криволинейной трапецией. Отрезок $[a, b]$ разделим на n частей, длины которых могут быть произвольными. Каждый такой отрезок будем называть частичным. Абсциссы точек деления обозначим через $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ и будем полагать, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Длину отрезка $[x_0, x_1]$ обозначим Δx_1, отрезка$[x_1, x_2]$ – Δx_2 и т.д. На каждом частичном отрезке выберем произвольные точки $k_1, k_2, \ldots$..

k_n и вычислим $f(k_1)$, $f(k_2)$, …, $f(k_n)$ – значения заданной функции $f(x)$ в этих точках. Далее построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников имеющих своим основанием отрезки Δx_1, Δx_2, Δx_n, а высотой ординаты $f(k_1)$, $f(k_2)$, …, $f(k_n)$. Найдем произведения $f(k_1)\Delta x_1$, $f(k_2)\Delta x_2$, …, $f(k_n)\Delta x_n$. Каждое такое произведение равно площади прямоугольника.

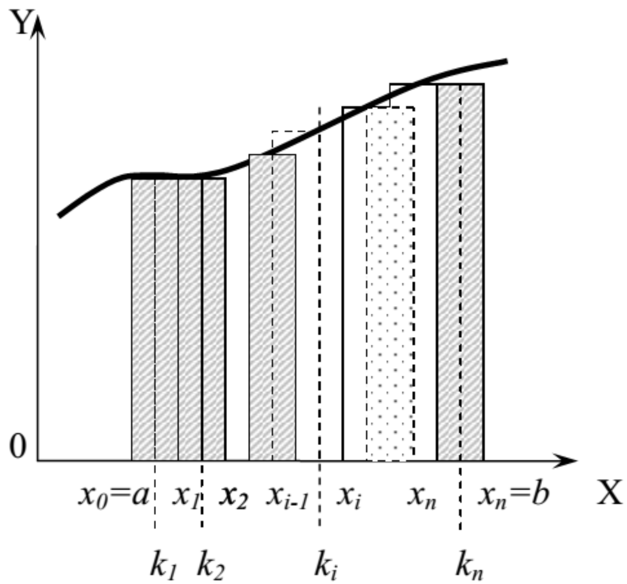

Рис. 3. Геометрический смысл определенного интеграла

Составим сумму таких произведений:

$$\sum f(k_1)\Delta x_1 + f(k_2)\Delta x_2 + \cdots + f(k_n)\Delta x_n.$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке$[a,b]$.

Если каждый из отрезков достаточно мал, т.е. $\Delta x_1 \to 0$,

$\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, то суммарная площадь прямоугольников стремится к площади криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i) \Delta x_i$$

Число I, к которому стремится интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(k_i) \Delta x_i$ при $\Delta x \to 0$, называется определенным интегралом функции$f(x)$ на отрезке [a,b] и обозначается

$$\boldsymbol{I = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(k_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.}$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется подынтегральной. Числа a и b называются соответственно **нижним и верхним пределами интегрирования**, а переменная величина x – **переменной интегрирования**.

Таким образом, определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ есть предел суммы бесконечно малых величин, количество которых неограниченно возрастает.

Геометрический смысл определенного интеграла. Как было показано выше определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox. От того, чем является подынтегральная функция, будет зависеть и результат. Из школьного курса известно: если подынтегральная функция есть скорость тела, то площадь под графиком функции равна пройденному пути.

В медицине есть радиоизотопные способы изучения кровотока. В кровяное русло вводят радиоактивное вещество и регистрируют его прохождение по кровяному руслу. С помощью полученных зависимостей определяют, например, минутный объем сердца (МО). В формулу для определения МО входит площадь под кривой разведения, которую можно рассчитать с помощью определенного интеграла.

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке местами пределов интегрирования, знак определенного интеграла меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак определенного интеграла:

$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, где C = const.

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

4. Если нижний и верхний пределы определенного интеграла равны между собой, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5. Промежуток интегрирования [a,b] можно разбивать на мелкие промежутки:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

§ 4. Вычисление определённого интеграла

Формула Ньютона-Лейбница

Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижнем пределах интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)_a^b = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где *F(X)*есть первообразная для подынтегральной функции*f(x)*.Формула (1) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Правило вычисления определенного интеграла: для того чтобы вычислить определенный интеграл$\int_a^b f(x)dx$, достаточно найти неопределённый интеграл$\int f(x)dx$, подставить в найденное выражение сначала верхний предел, а затем нижний, и из первого результата вычесть второй.

Пример 1.

$$\int_1^2 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Пример 2.

$$\int_{-2}^2 (3x^5 + 4x - 1)dx = 3\int_{-2}^2 x^5dx + 4\int_{-2}^2 xdx -$$

$$-\int_{-2}^2 dx = \frac{x^6}{6}\Big|_{-2}^2 + 2x^2\Big|_{-2}^2 - x\Big|_{-2}^2 = \left(\frac{2^6}{6} - \frac{(-2)^6}{6}\right) +$$

$$+ 2(2^2 - 2^{-2}) - \big(2 - (-2)\big) = -4.$$

Замена переменных в определенных интегралах

Часто для упрощения вычисления интеграла приходиться заменять независимую переменную величину x, полагая, что *x = φ(t)* или *t = φ(x)*. Это приводит к формулепреобразования определенного интеграла при введении новой переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$$

Важно отметить, что замена переменной в определенном интеграле приводит в общем случае к интегралу с новыми пределами интегрирования. Для того, чтобы найти новые пределы интегрирования, необходимо подставить в заменяемое выражение сначала нижний предел *a* заданного интеграла и решить полученное уравнение: *a = φ(t)*. Значение t_1, найденное из него, и будет новым нижним пределом. Затем для определения нового верхнего предела в x=$\varphi(t)$подставляется верхний предел b заданного интеграла и решается уравнение $b = \varphi(t)$. Найденное из этого уравнения значение t_2 будет новым верхним пределом. Сделав замену переменной, изменив пределы интегрирования, после вычисления преобразованного определенного интеграла нет необходимости переходить к старой переменной, как это мы делали при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной.

Пример 3. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Решение.

Введем подстановку: $t = 1+x^2$, тогда $dt=2xdx$, откуда $xdx = \frac{dt}{2}$. Переход к новой переменной требует изменения пределов интегрирования. Из выражения $t=1+x^2$ находим, что при $x=1$ верхний предел интегрирования $t_2=1+1^2=2$. Аналогично, нижний предел при $x=0$ $t_1=1-0=1$. Таким образом,

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \\ = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox.

При вычислении площадей следует помнить, что:

1) Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ отрицательна, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет отрицательное значение. Поскольку площадь – величина положительная, следует брать модуль интеграла.

2) Если функция $f(x)$ пересекает ось Ox, то для вычисления площади необходимо разбить определенный интеграл на два: один для положительных значений $f(x)$, другой для отрицательных:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|.$$

3) Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ равна

$$S = \int [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

Пример 4. Найти площадь между линиями: $y_1=x^2$ и $y_2=3x$.

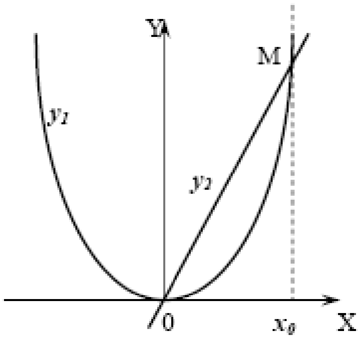

Рис. 4.

Решение. Искомая площадь равна разности между площадью треугольника ОМx_0 и площадью криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы:

$$S = \int_0^{x_0} 3x dx - \int_0^{x_0} x^2\, dx.$$

Абсциссу точки пересечения графиков находим из уравнения $x^2 = 3x$. Откуда $x_0 = 3$. Следовательно,

$$S = \int_0^3 3x dx - \int_0^3 x^2\, dx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 =$$
$$= 4{,}5.$$

Пример5. Найти площадь, ограниченную синусоидой в пределах изменения аргумента x от $x=0$ до $x= 2\pi$

Решение. Разобьем промежуток интегрирования на два: $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$

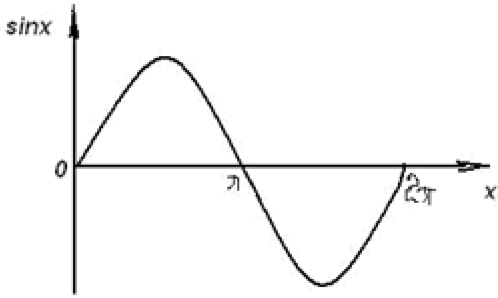

Рис. 5.

$$S = \int_0^{\pi} sinxdx + \int_{\pi}^{2\pi} sinx\,dx = -cosx \left| \begin{matrix} \pi \\ 0 \end{matrix} \right. + cosx \left| \begin{matrix} 2\pi \\ \pi \end{matrix} \right. =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) - (\cos 2\pi - \cos\pi) = 4.$$

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия дифференциальных уравнений

Дифференциальными уравнениями описываются различные процессы в биологии, химии, физике и медицине. Они позволяют, в частности, определять изменение состояния различных биологических систем со временем, создавать и анализировать математические модели многих функциональных систем человека.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y* и ее производные (или ее дифференциалы).

Дифференциальное уравнение в общем виде можно записать так:

$$F(x, y, y'y'' \ldots\ldots y^n)=0 \qquad (1)$$

В случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, ***дифференциальное уравнение*** называется ***обыкновенным***.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Например, $y' - 2xy^2 + 5 = 0$ – уравнение первого порядка, $y'' + y = 0$ – уравнение второго порядка.

Примером дифференциального уравнения является второй закон Ньютона, определяющий силу F как произведение массы тела m и на приобретенное под действием силы ускорение a: $F = ma$.

Учитывая, что ускорение есть первая производная от скорости v, запишем второй закон Ньютона в виде дифференциального уравнения:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

Или, поскольку ускорение является второй производной от пути S этот закон может быть представлен в виде дифференциального уравнения второго порядка:

$$F = m\frac{d^2S}{dt^2}$$

Решением дифференциального уравнения является такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением, или интегралом уравнения (1), называется всякая дифференцируемая функция

$$y=f(x,C_1,C_2\ldots C_n), \qquad (2)$$

которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Общее решение содержит столько произвольных постоянных, каков *порядок уравнения.*

Так, решением дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + y = 0, \qquad (3)$$

является функция

$$y=C_1\sin x + C_2\cos x \qquad (4)$$

При подстановке функции (4) в уравнение (3) оно превращается в тождество.

Проверим правильность решения. Для этого возьмем вторую производную от $y=C_1\sin x + C_2\cos x$:

$$y' = C_1\cos x - C_2\sin x\,, \qquad (5)$$

$$y'' = -C_1\sin x - C_2\cos x \qquad (6)$$

Подставив y'' и у в уравнение $y''+y=0$, получим тождество

$$-C_1\sin x - C_2\cos x + C_1\sin x + C_2\cos x = 0.$$

Частным решением дифференциального уравнения (1) называется такое решение, которое получается из общего решения, если в последнем произвольным постоянным придать определенные значения, которые определяются из начальных условий.

Пример 1. Общее решение дифференциального уравнения $y''+y=0$ есть $y=C_1\sin x+C_2\cos x$. Найти частное решение, если при $x=0$ $y=2$, а $y'_x=-1$.

Решение.

Подставив в общее решение (4) начальные условия ($x=0$ $y=2$), получим: $2 = C_1\sin 0 + C_2\cos 0$, откуда $C_2 = 2$

Подставим начальные условия ($x = 0$, $y'_x = -1$) в уравнение (5)

$-1 = C_1\cos 0 - C_2\sin 0$, откуда $C_1 = -1$

Искомое частное решение будет иметь вид:

$$y = 2\cos x - \sin x$$

Кривая $y=f(x)$, являющаяся решением уравнения называется **интегральной кривой дифференциального уравнения**.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Дифференциальные уравнения типа $y'=f(x)$

Этот тип уравнений $y'=f(x)$ является самым простым типом уравнений первого порядка. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то это уравнение может быть переписано так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{1}$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$dy = f(x)dx. \tag{2}$$

<u>**Общее решение:**</u>

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

2. Дифференциальные уравнения типа $y'=f(y)$

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то это уравнение может быть переписано так:

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{4}$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $dy = f(y)dx$.

$$\frac{dy}{f(y)} = dx \tag{5}$$

<u>**Общее решение:**</u>

$$\int \frac{dy}{f(y)} = F(y) = x + C$$

Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

1. Дифференциальные уравнения типа

Уравнения типа $f(x)dx + f(y)dy=0$ называются дифференциальными уравнениями с разделенными переменными. Уравнение решается путем непосредственного интегрирования.

<u>Общее решение:</u>

$$\int f(x)dx + \int f(y)dy = C.$$

2. Дифференциальные уравнения типа

$$f_1(x) \cdot f_2(x)dx + \varphi_1(y) \cdot \varphi_2(y) = 0$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными***.

Разделение переменных производится делением обоих частей произведение $\varphi_1(x) \cdot f_2(y)$. После деления на это произведение уравнение примет вид

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0,$$

а его ***<u>общее решение</u>*** запишется так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C,$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка: $y' =2xy$.

Решение.

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int xdx$$

получаем

$$lny = x^2 + C.$$

Так как в уравнение входит ln$y$, то постоянную интегрирования удобнее выразить в виде логарифма т.е.

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

или

$$\ln \frac{y}{C} x^2$$

Потенцируя это равенство, получаем

$$y = C \cdot e^{x^2}.$$

Это выражение является общим решением искомого уравнения.

Пример 2.Найти общее решение уравнения

$$xdx + ydy = 0.$$

Решение. Уравнение решаем путем непосредственного интегрирования:

$$\int xdx + \int ydy = 0.$$

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$или $x^2 + y^2 = 2C_1$, обозначим $2\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}$. Тогда общее решение имеет вид: $y = C - x^2$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$(x+1)dy - y^2dx = 0$ и частное решение, удовлетворяющее условию: *y = 1* при *x = 1*.

Решение.

Разделим переменные путем тождественных алгебраических преобразований.

$$y^{-2}dy = \frac{dx}{x+1}$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^{-2}dy = \int \frac{dx}{x+1}, -\frac{1}{y} = \ln|x+1| + C,$$

$$y = -\frac{1}{\ln|x+1|+C}$$ - общее решение.

Подставим в общее решение начальные условия:

$$1 = -\frac{1}{\ln 2+C},$$

$$\ln 2 + C = -1,\ \ln 2 = 0{,}69$$

$$C = -3{,}69.$$

Частное решение имеет вид:

$$y = -\frac{1}{\ln|x+1|-3{,}69}.$$

§ 3. Однородные и линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

называется однородным если *P(x,y)* и *Q(x,y)* являются однородными функциями переменных *x* и *y* одного и того же измерения. Так, например, уравнение

$$(x^3+x^2y)dx+(xy^2+y^3)dy=0$$

является однородным, так как в нем $P=x^3+x^2y$ и $Q=xy^2+y^3$- однородные функции переменных *x* и *y* одного и того же (третьего) измерения.

Однородное дифференциальное уравнение (1) приводится к виду уравнение с разделяющимися переменными подстановкой

$$y=ux \qquad (2)$$

где *u*- новая неизвестная функция.

Пример 1.Решить уравнение $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$.

Решение.

В данном случае $P=y^2$ и $Q=x^2-xy$- однородные функции одного и того же (второго) измерения. Полагаем $y=ux$, откуда $dy=udx+xdu$.

Подставляем эти выражения *y* и *dy* в данное уравнение:

$$u^2x^2dx+(x^2-x^2u)(udx+xdu)=0;$$

$$ux^2dx+x^3(1-u)du=0 \qquad (3)$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, находим

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-u)du}{u}=0.$$

Интегрируя это уравнение:

$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{du}{u}-\int du=C$; $\ln|x|+\ln|u|-u=C$.

В результате потенцирования получается общий интеграл уравнения (3):

$\ln|x|+\ln|u|-\ln e^{u}=\ln C$; $\ln|ux|=\ln Ce^{u}$; $ux=Ce^{u}$.

Определив u из уравнения (2) и заменив в последнем уравнении, находим общий интеграл данного уравнения:

$\frac{y}{x}x=Ce^{\frac{y}{x}}$, или $y=Ce^{\frac{y}{x}}$.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно первой степени относительно неизвестной функции y и ее производной y'. Такое уравнение имеет вид:

$$y'+Py=Q \qquad (4)$$

где P и Q – функции от x или постоянные величины. Уравнение (4) решается подстановкой

$$y=uv,$$

где u и v - неизвестные функции от x, одну из которых можно выбрать произвольно.

Пример 2. Решить уравнение $y'+\frac{2}{x}y=x^{3}$.

Решение.

В этом линейном уравнении $P=\frac{2}{x}$, $Q=x^{3}$. Полагаем $y=uv$, тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(uv(}{dx} = \frac{udv + vdu}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Подставив в данное уравнение вместо y и y' их выражения, получаем:

$$\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)+\frac{2}{x}uv=x^3 \text{ или}$$

$$\left(\frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v\right)u+v\frac{du}{dx}=x^3 \qquad (5)$$

Выше было замечено, что одна из функций (u или v) может быть выбрана произвольно. Выберем функцию v так, чтобы в уравнении (5) выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. имело место равенство:

$$\frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=0$$

Разделив переменные и интегрируя полученное уравнение, находим

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x};$$

отсюда

$$\ln v=\ln\frac{1}{x^2};$$

$$v=\frac{1}{x^2}, \text{ при } C=0 \qquad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим:

$$0u+\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx}=x^3,$$

откуда

$$du=x^5dx;$$

тогда

$$u=\int x^5dx+C$$

Соответственно

$$u=\frac{1}{6}x^6+C \qquad (7)$$

Подставив в равенство $y=uv$ вместо u и v их найденные выражения, получаем общее решение данного линейного дифференциального уравнения:

$$y=\left(\frac{1}{6}x^6+C\right)\frac{1}{x^2}, \text{ или } y=\frac{1}{6}x^4+\frac{C}{x^2}.$$

§ 4. Дифференциальные уравнения второго порядка

В дифференциальное уравнение второго порядка могут входить переменные *x, y* и производные y', y'', причем те или иные из величин *x*,*y*, y' могут и отсутствовать. Простейшее уравнение второго порядка имеет вид:

$$y''=f(x). \qquad (1)$$

Уравнения этого вида решаются двукратным интегрированием.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y''=\cos x.$

Решение.

$y''=(y')'_x=\left(\frac{dy}{dx}\right)'_x.$ Полагаем $\frac{dy}{dx}=z$, тогда данное уравнение перепишется в следующем виде:

$z'_x=\cos x$, или $dz=\cos x\,dx.$

Интегрируя это уравнение, находим

$\int dz=\int\cos x\,dx$, или $z=\sin x+C_1.$

Заменяем в последнем уравнении величину z ее значением:

$$\frac{dy}{dx}=\sin x+C_1;\quad dy=(\sin x+C_1)dx.$$

Интегрируем второй раз и получаем общее решение данного уравнения:

$$\int dy=\int(\sin x+C_1)dx=-\cos x+C_1x+C_2$$

Как видим, общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

§ 5. Этапы решения задач при использовании дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения - математический аппарат, который позволяет решать не только чисто математические или физические задачи, но и количественно описывать самые разнообразные процессы (медико-биологические, социальные и др.). Несмотря на разнообразие рассматриваемых явлений, использование аппарата дифференциальных уравнений для их исследования должно происходить в определенной общей логической последовательности.

Рассмотрим этапы решения задач при использовании дифференциальных уравнений.

1. Составление дифференциального уравнения. Этот этап наиболее сложный и ответственный. Здесь необходимо учесть все факторы, которые влияют на течение исследуемого процесса, возможно, сделать некоторые допущения, определить начальные условия. При этом исследователь должен основываться на твердо установленных экспериментальных фактах или логических посылках. Например, при создании математических моделей работысердца их практическая полезность(получение новых сведений, позволяющих улучшить диагностику сердечнососудистых заболеваний и повысить эффективность их лечения) определится полнотой и корректностью математического учета физиологических данных и клинической практики.

2. Решение уравнения. Этот этап может считаться более простым, чем первый, поскольку он предполагает выполнение чисто математических операций. Если невозможнополучить решение дифференциального уравнения в аналитическом виде, то оно может бытьрешено расчетным путем с применением современной вычислительной техники.

3. Оценка и анализ результата. Получив решение дифференциального уравнения (или системы уравнений), необходимо оценить, какова теоретическая и практическая полезность полученных результатов − установлены ли новые закономерности в протекании, например, физиологических процессов; определено ли количественно влияние выбранных факторов на степень развития и характер патологии и т.п.

Кроме того, следует сопоставить полученные результаты с имеющимися установленными фактами. Если из математического описания физиологического процесса следуют неожиданные и неизвестные ранее сведения, то это может означать: 1) действительно установлено новое явление, которое впоследствии может быть подтверждено экспериментальными исследованиями; 2) полученный результат возник из-за того, что на этапе составления дифференциального уравнения не учтены все необходимые факторы или сделаны слишком грубые допущения.

3. Примеры решения задач на составление дифференциального уравнения

В соответствии с обозначенными в пункте 2 этапами, применим аппарат дифференциальных уравнений для рассмотрения некоторых задач.

Задача 1. Каков характер движения тела(зависимость пути S отвремениt), если сила F на тело не действует?

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение тела в этом случае, представляет собой второй закон Ньютона:

$$m\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = const.$$

Считая, что масса m $\neq 0$, получим что в этом случае ускорение равно нулю и движение происходит с постоянной скоростью v. Для установления зависимости $S=f(t)$ имеем уравнение:

$$\frac{dS}{dt} = v \Rightarrow dS = v \cdot dt \Rightarrow \int dS = v \int dt.$$

В результате интегрирования получим:

$$S = vt + C \Rightarrow S = vt + S_0,$$

где C - произвольная постоянная, которая имеет смысл пути, пройденному к начальному моменту времени, и может определена из начального условия: при $t = 0$, $S = S_0$.

Решение представляет собой уравнение равномерного прямолинейного движения. Таким образом, если на тело не действует сила ($F = 0$), то тело сохраняет состояние покоя (частный случай, если $v = 0$), или равномерного прямолинейного движения. Используя аппарат дифференциальных уравнений, из второго закона Ньютона получаемего первый закон.

Задача 2. Рассмотрим микробиологическую задачу. Установим закон изменения со временем (t) численности бактерий (n), помещенных в питательную среду.

Для составления дифференциального уравнения, отражающего существование бактерий в этих условиях, необходим некоторый факт, который следует записать в математической форме. На основании экспериментальных данных и общих соображений таким фактом может служить утверждение: “скорость размножения бактерий (математически $\frac{dn}{dt}$) пропорциональна их числу (n) в данный момент времени”.

Таким образом, необходимое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dn}{dt} = kn,$$

где k - доступный экспериментальному определения коэффициент пропорциональности, зависящий от вида бактерий и параметров среды их обитания. Дополнительные данные, необходимые для решения задачи следуют из начального условия: при $t = 0$, $n = n_0$, т.е. в начальный момент времени количество бактерий считается известным и равным n_0 .

Для решения данного уравнения произведем разделение переменных и последующее интегрирование:

$$\int \frac{dn}{n} = k \int dt \ \Rightarrow \ln n = kt + \ln C.$$

Произвольную постоянную в уравнении удобно представить в виде lnC. Из начального условия: $C = n_0$.

Решая логарифмическое уравнениес учетом начального условия, получим искомый закон изменения числа бактерий со временем:

$$n = n_0 e^{kt}.$$

Произведем некоторый анализ результата. В чем его сиюминутная практическая полезность и возможные более отдаленные выводы?

1) Зная коэффициент k и начальное число бактерий n_0 легко определить их число влюбой момент времени t.

2) Прирост бактериальной массы определяется через коэффициент к условиями среды обитания бактерий. Чем больше значение k, тем быстрее увеличивается число бактерий

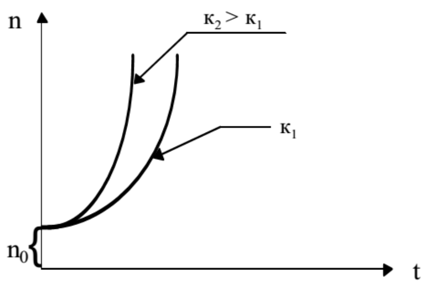

Рис. 6.

(см.рис.6). Если существуют факторы, препятствующие размножению бактерий (повышенная температура, ионизирующие излучения и др.), то коэффициент k уменьшается и может принять отрицательное значение, в этом случае будет наблюдатьсягибель бактерий.

3) С некоторым риском можно попытаться придать полученному для бактерий результату большую общность и сформулировать утверждение: “любой биологический вид, находясь в оптимальных для своего существования условиях, экспоненциально увеличивает свою численность со временем”. Так, кролики, завезенные в Австралию, где практически нет хищников, которые бы ими питались, увеличили свое число в соответствии с формулой

$$n = n_0 e^{kt}$$

и стали представлять серьезную опасность для сельского хозяйства.

Задача 3. Установим закон радиоактивного распада ядер атомов.

Для составления исходного дифференциального уравнения обозначим N число нераспавшихся ядер атомов в данный момент времени t, N_0 — число нераспавшихся ядер вначальный момент времени($t = 0$). В процессе радиоактивного распада число N убывает.

Обозначим через dN убыль нераспавшихся ядер за малый промежуток времени dt. Этаубыль, естественно, пропорциональна промежутку времени dt и числу нераспавшихся ядер N:

$$dN = -\lambda N dt,$$

где λ- постоянная радиоактивного распада. Знак“минус” отражает тот факт, что число нераспавшихся ядер со временем уменьшается.

Решая данное уравнениеметодом разделения переменных с учетом начального условия(при $t = 0$, $N = N_0$) получим закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Искомое уравнение описывает убывание количества нераспавшихся ядер за счет радиоактивного распада.

Допустим теперь, что некоторое количество радионуклидов одномоментно поступило в организм. Убыль (dN) нераспавшихся радиоактивных ядер в организме будет определятся двумя процессами: 1) физическим распадом ядер и 2) биологическим выведением радиоактивных веществ из организма. Дифференциальное уравнение, отражающее эти двапроцесса, будет иметь вид:

$$dN = -(\lambda+\lambda_в)\, N\, dt\ ,$$

где $\lambda_в$ - постоянная биологического выведения.

Решение уравнения представляет закон исчезновения радионуклидов из организма при указанных условиях и имеет вид:

$$N = N_0 e^{-(\lambda+\lambda_в)t}$$

Задача 4. Рассмотрим внутривенное введение некоторого лекарственного вещества через капельницу. Будем считать, что оно вводится в кровь с постоянной скоростью v(г/мин.), а выводится из крови со скоростью, пропорциональной ее количеству m, содержащемуся вкрови на данный момент времени t. Поставим задачу: найти закон, определяющий зависимость количества лекарственного вещества в крови от времени, т.е. $m = f(t)$. Задача сводитсяк нахождению вида функции $m = f(t)$.

Изменение содержания лекарства в крови (dm) за малое время (dt) определяется его приростом за счет введения ($v\, dt$) и уменьшением за счет выведения ($km\, dt$). Постоянный коэффициент k характеризует интенсивность процесса утилизации.

Таким образом, необходимое для решения задачи дифференциальное уравнение имеет вид:

$$dm = v\,dt - \kappa m dt.$$

Начальное условие можно записать: при $t = 0$ $m = m_0$, где m_0 - имеющаяся в крови масса вещества до начала введения.

Для решения уравнения необходимо произвести разделение переменных и последующее интегрирование:

$$\int \frac{dm}{v-km} = \int dt.$$

При нахождении интеграла в левой части выполним замену переменных, обозначив $v - \kappa m = u$:

$$\int \frac{dm}{v-km} = \left| \begin{matrix} v-km \\ -kdm = du \\ dm = -\dfrac{du}{k} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{k}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{k}\ln u + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{k}[\ln(v-km)] + C_1.$$

Приравняв левую и правую часть и объединяя постоянные, получим:

$$\ln(v - \kappa m) = - \kappa t + C.$$

Задача 5.

Терапевтический эффект некоторого лекарственного препарата сохраняется при условии, что его концентрации, не меньше 10% начальной концентрации в момент приема препарата. Определить сколько раз в сутки следует принимать препарат, чтобы его эффект сохранялся непрерывно. Известно, что через 1 час 12 минут концентрация препарата уменьшается в два раза. Скорость усвоения препарата пропорциональна его концентрации.

Дано:

С - концентрация вещества в любой момент времени;

C_0 - концентрация в момент времени t=0;

К-коэффициент пропорциональности.

t=72 мин

$$C = \frac{C_0}{2}$$

$C = 0{,}1C_0$

Найти: n =?

Решение.

Во-первых, определим закон (формулу) по которой происходит разложение лекарственного препарата:

$$\frac{dC}{dt} = -KC;\ \frac{dC}{C} = -Kdt, \int\frac{dC}{C} = -K\int dt,$$

$\ln C = -Kt + \ln A$, где A – произвольная постоянна интегрирования.

$$\ln C - \ln A = -Kt,\ \frac{\ln C}{A} = -Kt,\ C = A\cdot e^{-Kt}.$$

При $t = 0, C = C_0 = A$, получаем $C = C_0\cdot e^{-Kt}$

Во-вторых, чтобы найти K, надо воспользоваться условием

$C = \frac{C_0}{2}$ при *t=72 мин*:

$\frac{C_0}{2} = C_0\cdot e^{-72K}$ (обе части сокращаем на C_0),

$\frac{1}{2} = e^{-72K}$

$\ln 2 = 72K$, отсюда $К = \frac{ln2}{72} = \frac{0{,}693}{72} = 0{,}00962.$

В-третьих, находим время через которое концентрация препарата станет равной: $C_1 = 0{,}1C_0$

$0{,}1C_0 = C_0\cdot e^{-0{,}009625t}$, (обе части сокращаем на C_0),

$0{,}1 = e^{-0{,}009625t}$ (логарифмируем обе части уравнения)

$\ln 10 = 0.009625\, t$, так как $\ln 10 = 2{,}302$,

тогда $2{,}302 = 0.009625\, t$, отсюда $t \approx 240$ (мин) = 4 (часа)

$n = 24/4 = 6$ (раз в сутки).

Задача 6.

При расследовании убийства температура тела убитого оказалась равной $T = 20^0\ C$, а температура воздуха $T_в = 15^0\ C$. Скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и воздуха. Коэффициент пропорциональности К определяется опытным путем. Определить время прошедшее с момента убийства.

Дано:

$T_0 = 36{,}6^0C$ - начальная температура тела;

T - температура тела в любой момент времени;

$T = 20^0\ C$

$T_в = 15^0\ C$

К-коэффициент пропорциональности;

$K = 0{,}0069$ мин$^{-1}$

Найти: t=?

Решение:

По условию задачи (температура тела зависит от температуры воздуха, чем ниже температура воздуха, тем быстрее охлаждается тело) $\frac{dT}{dt} = -K(T - T_в)$. Разделим переменные в уравнении и проинтегрируем его:

$\frac{dT}{T-T_в} = -Kdt$; $\int \frac{dT}{T-T_в} = -\int Kdt$; $\ln(T-T_в) = -Kt + \ln C$

$T - T_в = Ce^{-Kt}$

$$T = T_в + Ce^{-Kt} \qquad (1)$$

Согласно начальным условиям при $t = 0$, $T = T_0 = 36{,}6$ найдем значение C:

$T_0 = T_в + Ce^{-K0}$; $C = T_0 - T_в = 36{,}6 - 15 = 21{,}6$.

Подставим найденное значение в уравнение (1):

$$T = T_в + (T_0 - T_в)e^{-Kt} \qquad (2)$$

Уравнение (2) есть закон охлаждения тела с течением времени. Подставим в (2) заданные величины:

$20 = 15 + 21{,}6\, e^{-0{,}0069t}$;

$5 = 21{,}6\, e^{-0{,}0069t}$;

$0{,}231 = e^{-0{,}0069t}$;

$t = \ln 0{,}231 / -0{,}0069 = -1{,}4633/-0{,}0069 \approx 212$ мин. = 3 часа 53 минуты - время, прошедшее с момента убийства.

Глава 4. Элементы теории вероятностей

§ 1. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей – раздел математики, который изучает законы, свойственные массовым однородным случайным событиям.

Предмет изучения биологов и медиков – живой организм, зарождение, развитие и существование которого определяется очень многими и разнообразными, часто случайными внешними и внутренними факторами. Именно поэтому явления и события живого мира во многом тоже случайны по своей природе.

Элементы неопределенности, сложности, многопричинности, присущие случайным явлениям, обусловливают необходимость создания специальных математических методов для изучения этих явлений. Разработка таких методов, установление специфических закономерностей, свойственных случайным явлениям, – главные задачи теориивероятностей. Характерно, что эти закономерности выполняются лишь при массовости случайных явлений. Причем индивидуальные особенности отдельных случаев как бы взаимно погашаются, а усредненныйрезультатдлямассыслучайных явлений оказывается уже не случайным, а вполнезакономерным**.** В значительной мере данное обстоятельство явилось причиной широкого распространения вероятностных методов исследования в биологии и медицине.

Рассмотрим основные понятия теории вероятностей.

Вероятность случайного события

Каждая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, базируется на ряде основных понятий. Например, в геометрии – это понятия точки, прямой линии; в механике – понятия силы, массы, скорости и т.д.

Основные понятия существуют и в теории вероятностей, одно из них – случайное событие.

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет при любых испытаниях. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20^0C, то событие "вода в сосуде находится в жидком состоянии" есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий (испытание).

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если произведено испытание. Например, событие "вода в сосуде находится в твердом состоянии" заведомо не произойдет, если произведено испытание предыдущего примера.

Событие называется случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий оно может либо произойти, либо не произойти.

В дальнейшем, вместо того чтобы говорить "совокупность условий осуществлена", будем говорить кратко:"произведено испытание". Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел - испытание, а попадание в определенную область мишени - событие.

Пример 2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета - событие.

Случайные события обозначаются буквамиA, B, C … и т.д. Приведем несколько примеров случайных событий:

A –выпадение орла (герба) при подбрасывании стандартной монеты;

B – рождение девочки в данной семье;

C – рождение ребенка с заранее заданной массой тела;

D – возникновение эпидемического заболевания в данном регионе в определенный период времени и т.д.

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появления других событий в одном и том же испытании.

Пример 3. Подброшена монета. При ее падении появление «герба» исключает появление «решки» (надписи, определяющей цену монеты). События «выпал герб» и «выпала решка» несовместные.

Пример 4. Получение студентом на одном экзамене оценки «2», или «3», или «4», или «5» – события несовместные, так как одна из этих оценок исключает другую на том же экзамене.

Два единственно возможных, но несовместных события называются *противоположными*. Если событие обозначено черезA, то противоположное событие обозначают $\overline{A}$.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится, хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Пример 5. Врач произвел тщательное обследование больного. Обязательно произойдет одно из двух событий: пациент здоров или болен. Эти два несовместных события образуют полную группу.

Пример 6. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: "выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй", " выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй", "выигрыш выпал на оба билета", "на оба билета выигрыш не выпал". Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

События называют равновозможными, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 7. Появление "герба" и появление надписи при бросании монеты - равновозможные события. Предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло ли событие B или нет, например, факт обнаружения болезни у одного из пациентов (событие A) не зависит от обнаружения или не обнаружения болезни следующего пациента (событие B).

Вероятность – дно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Рассмотрим классическое определение вероятности случайного события. Для этого приведем пример.

Пример 8. В непрозрачном мешке перемешаны 22 шара, отличающихся только цветом; из них 6 шаров белого цвета, 7 – красного и 9 – синего. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т.е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события *A*. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем элементарным исходом (элементарным событием). В нашем примере возможны 22 элементарных исходов: 6 шаров белого цвета,7 – красного и 9 – синего.

Данные элементарные исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны). Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем благоприятствующими этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию*A* (появлению цветного шара) 16 шаров (7 красного + 9 синего цвета). Таким образом, событие *A* наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой из элементарных исходов, благоприятствующих событию *A*. Отношение числа благоприятствующих событию *A* элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события *A* и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 22; из них 16 благоприятствуют событию *A*. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 16/22 = 8/11$. Это число и дает количественную оценку степени возможности появления цветного шара.

Вероятностью события *A*называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Итак, вероятность события *A*определяется формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Из классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события, т.е. события, которое в результате опыта обязательно произойдет ($m = n$), равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события ($m = 0$) равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

УКАЗАНИЕ**.** Анализ и решение задач, в которых вероятность рассматриваемого события вычисляется по формуле $\mathrm{P}(A) \approx \frac{m}{n}$, могут быть выполнены по следующей схеме:

1. Уясните, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Подсчитайте число испытаний (n).
3. Сформулируйте событие, вероятность которого необходимо найти.
4. Подсчитайте число испытаний (m).

5. По формуле $P(A) = \frac{m}{n}$ вычислите вероятность появления рассматриваемого события.

Задача № 1. Из 35 экзаменационных билетов, занумерованных с помощью целых чисел от 1 до 35. наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

Решение.

Испытание состоит в том, что извлекается один билет. Число испытаний n= 35. Событие A означает, что номер взятого билета кратен трем. Этому событию благоприятствуют 11 исходов испытания (3, 6, 9, …, 33). Следовательно, по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$ искомая вероятность равна $P(A) = \frac{11}{35}$.

Задача № 2.В урне 20 черных и 80 белых шаров. Из нее наугад вынимается один шар. Определите вероятность того, что этот шар будет черным.

Решение.

Количество всех шаров в урне – это общее число равновозможных случаев n, т.е. n = 20 + 80 =100, из них событиеA (извлечение черного шара) возможно лишь в 20, т.е. m = 20. Тогда $P(A) = P$(ч.ш.) = $\frac{m}{n} = \frac{20}{100}$ = 0,2 =20%.

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

Таким образом, относительная частота событияA определяется формулой

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{2}$$

где m – число появлений событияA; n – общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опытов.

Задача № 3. Среди *1000* обследованных лиц у *26* обнаружена болезнь легких. Найти относительную частоту заболеваемости легких.

Решение.

Испытанием в данной задаче является обследование $n= 1000$, событием - заболеваемость легких. Здесь $m = 26$ – абсолютная частота появления болезни, а отношение $m/n = 26/1000 = 0{,}026$ – относительная частота этого события.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся опыты, в каждом из которых число испытаний велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события. Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Пример 9. По данным статистики Астраханской области относительная частота рождения девочек за 1997 г. по месяцам характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Пример 10. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления герба.

Таблица 1

Число бросаний	Число появления герба	Относительная частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. Например, при 4040 испытаниях отклонение равно 0,0069, а при 24000 испытаний – 0,0005. Приняв во внимание, что вероятность появления герба при бросании монеты равна 0,5, мы вновь убеждаемся, что относительная частота колеблется около вероятности.

Статистическое определение вероятности случайного события применяется тогда, когда невозможно использоватьклассическое определение (где число элементарных исходов испытания конечно). Это часто имеет место в биологии и медицине. В таком случае вероятность $P(A)$ определяют путем обобщения результатовреально проведенных серий испытаний (опытов).

В качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.

Итак, статистической вероятностью $P(A)$ случайного событияA называют предел, к которому стремится относительная частота появления этого события при неограниченном возрастании числа испытаний (при $n \to \infty$):

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} \qquad \text{………………...} \ (3)$$

Приближенно статистическая вероятность случайного события равна относительной частоте появления этого события при большом числе испытаний:

$$P(A) \approx \frac{m}{n} \qquad \text{……………………….}(4)$$

Как было показано в пример 10, в опытах по бросанию монеты относительная частота выпадения герба при 12000 бросаний оказалась равной 0,5016, а при 24000 бросаний – 0,5005. В соответствии с формулой (1):

$$P(\text{герб}) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Задача № 4. При врачебном обследовании 500 человек у 5 из них обнаружили опухоль в легких (событие *A*). Определите относительную частоту и вероятность этого заболевания.

Решение.

По условию задачи $m = 5$, $n = 500$, относительная частота $W(A) = m/n = 5/500 = 0{,}01$; поскольку n достаточно велико, можно с хорошей точностью считать, что вероятность наличия опухоли в легких равна относительной частоте этого события:

$$P(A) = W(A) = 0{,}01 = 1\%.$$

Перечисленные ранее свойства вероятности случайного события сохраняются и при статистическом определении данной величины.

§ 2. Основные теоремы теории вероятностей

Для несовместных случайных событий выполняется теорема сложения вероятностей.

Теорема 1. Вероятность появления одного, но все равно какого, из нескольких несовместных событий $A_1, A_2, A_3 \ldots A_k$ равна сумме их вероятностей:

$P(A_1 \text{или } A_2 \ldots \text{ или } A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$(1)

Задача №1. В урне находится 50 шаров: 20 белых, 20 черных и 10 красных. Найдите вероятность появления белого (событие *A*) или красного шара (событие *B*), когда шар наугад достают из урны.

Решение.

$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B);$

$P(A) = 20/50 = 0{,}4;$

$P(B) = 10/50 = 0,2;$

P(A или B) = P(б.ш. или к.ш.) = $0,4 + 0,2 = 0,6 = 60\%$.

Задача №2. В классе 40 детей. Из них в возрасте от 7 до 7,5 лет 8 мальчиков (A) и 10 девочек (B). Найдите вероятность присутствия в классе детей такого возраста.

Решение.

$P(A) = 8/40 = 0,2;\ P(B) = 10/40 = 0,25.$

P(A или B) = $0,2 + 0,25 = 0,45 = 45\%$

Теорема 2. Если несовместные события $A_1, A_2 \dots A_k$ образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий всегда равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_k) = 1, \qquad (2)$$

Задача №3. Аптечный склад получает медикаменты с медицинских предприятий трех городов A, B, C. Вероятность получения медикаментов из города A равна 0,6; из города B – 0,3. Найти вероятность, что медикаменты получены из города C.

Решение.

Испытание состоит в поставке медикаментов из трех городов. События получения медикаментов из городов А, В, С составляют полную группу событий.

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

откуда

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,6 - 0,3 = 0,1.$$

Теорема 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (3)$$

Пример 1.Пусть $P(A)$ – вероятность летального исхода при некотором заболевании; она известна и равна 2%. Тогда вероятность благополучного исхода при этом заболевании равна 98% ($P(\overline{A}) = 1 – P(A) = 0{,}98$), так как $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Для независимых событий справедлива теорема умножения вероятностей.

Теорема 4. Вероятность совместного(одновременного) появления нескольких независимых случайных событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3 \ldots \text{ и } A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k). \qquad (4)$$

Совместное (одновременное) появление событий означает, что происходят события и A_1, и A_2 ,и A_3 … и A_k .

Задача №4. Есть две урны. В одной находится 2 черных и 8 белых шаров, в другой – 6 черных и 4 белых. Пусть событие A – выбор наугад белого шара из первой урны, B – из второй. Какова вероятность выбрать наугад одновременноиз этих урн по белому шару, т.е. чему равна P (A и B)?

Решение.

Вероятность достать белый шар из первой урны $P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8$ из второй – $P(B) = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Вероятность одновременно достать по белому шару из обеих урн – $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32 = 32\%$.

Задача № 5.Рацион с пониженным содержанием йода вызывает увеличение щитовидной железы у 60% животных большой популяции. Для эксперимента нужны 4 увеличенных железы. Найдите вероятность того, что у 4 случайно выбранных животных будет увеличенная щитовидная железа.

Решение.

Случайное событие A – выбор наугад животного с увеличенной щитовидной железой. По условию задачи вероятность этого события $P(A) = 0{,}6 = 60\%$. Тогда вероятность совместного появления четырех независимых событий – выбор наугад 4 животных с увеличенной щитовидной железой – будет равна:

$P(A_1$ и A_2 и A_3 и $A_4) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = (0{,}6)^4 \approx 0{,}13 = 13\%$.

Вероятность осуществления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением противоположных событий.

Вероятность появления только одного из событий

Пусть вероятности двух независимых событий A_1 и A_2 равны соответственно $P(A_1)$ и $P(A_2)$. Найдем вероятность появления *только одного из этих событий*. Введем события:

B_1 – «наступило только событие A_1», т.е. событие A_2 не наступило;

B_2 – «наступило только событие A_2», т.е. событие A_1 не наступило.

Так как события A_1 и A_2 независимы, то независимы и события (A_1 и $\bar{A}_2$), ($\bar{A}_1$ и A_2), ($\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$). Поэтому события B_1 и B_2 также независимы. Событие B_1 равносильно событию «наступило событие A_1, а событие A_2 не наступило», а B_2

равносильно событию «наступило событие A_2, а событие A_1 не наступило», т.е. $B_1 = A_1 \cdot \bar{A}_2$, $B_2 = \bar{A}_1 \cdot A_2$, где события $\bar{A}_1$и $\bar{A}_2$ – противоположные события A_1 и A_2. По свойству противоположных событий, зная вероятности появления событий A_1и A_2, найдем вероятности появления противоположных событий, т.е. $\bar{A}_1$и $\bar{A}_2$.

Поэтому $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1)$, $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2)$. Так как событие $B_1 + B_2$ – «наступило событие A_1 или наступило событие A_2», то для нахождения вероятности события $B_1 + B_2$ применим теоремы сложения и умножения независимых событий:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2).$$

Задача №6. В медицинском кабинете для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что сработает только один сигнализатор.

Решение.

Пусть событие A – «сработал только один сигнализатор». Данное событие заключается в том, что одно из событий A_1или A_2 наступит, где

A_1 – «сработал первый сигнализатор»,

A_2 – «сработал второй сигнализатор».

Пусть $P(A_1)$ – вероятность события A_1, а $P(A_2)$ – вероятность события A_2, тогда вероятности событий $\bar{A}_1$и $\bar{A}_2$ соответственно равны $P(\bar{A}_1) = 1 – 0,95 = 0,05$ и $P(\bar{A}_2) = 1- –$

$0{,}9 = 0{,}1$. Так как события A_1и A_2 независимы, то независимы и события (A_1 и $\bar{A}_2$), ($\bar{A}_1$и A_2). По теореме умножения:

$$P(A) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0.095 + 0{,}045 = 0{,}14.$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий

Пусть вероятности двух независимых событий A_1 и A_2 равны соответственно $P(A_1)$ и $P(A_2)$. Найдем вероятность появления *хотя бы одного из этих событий*. Введем событиеA – «наступило хотя бы одно из событий A_1, A_2».

Так как события A_1и A_2 независимы, то независимы и события (A_1 и $\bar{A}_2$), ($\bar{A}_1$и A_2), ($\bar{A}_1$и $\bar{A}_2$), где события $\bar{A}_1$и $\bar{A}_2$ – противоположные события A_1 и A_2. По свойству противоположных событий, зная вероятности появления событий A_1и A_2, найдем вероятности появления противоположных событий, т.е. $\bar{A}_1$и $\bar{A}_2$. Поэтому $P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1)$, $P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2)$. Для нахождения вероятности того, что хотя бы одно из событий произойдет, применим теоремы сложения и умножения независимых событий:

$$P(A) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) =$$

$$= P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2)=$$

$$= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2)$$

Задача №7. Рассматривается популяция плодовой мушки с двумя мутациями. Мутация крыльев встречается с вероятностью 0,3, а мутация глаз с вероятностью 0,4. С какой вероятностью встречается мушка, у которой хотя бы одна мутация?

Решение.

I способ.

Введем обозначения: событие A - «мутация крыльев», вероятность события A известна нам из условия задачи, т.е. $P(A) = 0,3$; событие B - «мутация глаз», $P(B) = 0,4$; событиеC - «хотя бы одна мутация», т.е. $C = A + B$, причем событияA и B совместны. В соответствии с тем, что вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

получаем

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

или

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

поскольку события A и B - независимые события. Подставив данные значения $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ в формулу для $P(C)$, найдем искомую вероятность

$$P(C) = (0,3+0,4)-0,3 \cdot 0,4 =0,58.$$

Следовательно, мушка, у которой хотя бы одна мутация встречается с вероятностью 0,58.

А нет ли другого более рационального способа решения данной задачи?

II способ.

Теорема 5.Вероятность наступления события А, состоящего в появлении хотя бы одного из событий A_1, $A_2,\ldots,A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Введем обозначения: событие *A* - «мутация крыльев», вероятность события *A* известна нам из условия задачи, т.е. $P(A) = 0{,}3$; событие *B* - «мутация глаз», $P(B) = 0{,}4$; событие*C* - «хотя бы одна мутация», т.е. $C = A + B$. Событие *C* является противоположным событию $\overline{A}\,\overline{B}$ (ни одной мутации). Поскольку события*A* и*B* независимые, то можно воспользоваться формулой

$$P(A+B) = 1 - P(\bar{A}\,\overline{B})$$

тогда

$$P(C) = 1\text{-}P(\bar{A})P(\overline{B})$$

или

$$P(C) = 1 - (1 - P(A)(1 - P(B)).$$

Подставляем численные данные, получаем

$$P(C) = 1 - (1 -0{,}3)(1--0{,}4)) = 0{,}58.$$

Задача № 8 .В физиотерапевтическом кабинете имеются четыре аппарата, работающих в данный момент, вероятность работы аппаратов равна соответственно: $P(A_1) = 0{,}7$; $P(A_2) = 0{,}8$; $P(A_3) = 0{,}9$; $P(A_4) = =0{,}95$. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один аппарат (событие *B*).

Решение.

Работа каждого аппарата не зависит от работы других аппаратов, поэтому события A_1, A_2, A_3, A_4 являются независимыми в совокупности. Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3, A_4 равны соответственно $P(\bar{A}_1) = 1 - P(\bar{A}_1) = 0{,}3$; $P(\bar{A}_2) = 0{,}2$;$P(\bar{A}_3) = 0{,}1$; $P(\bar{A}_4) = 0{,}05$. Таким образом, по определению осуществления хотя бы одного из событий $A_1, A_2,\dots,A_n$:

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4) =$$
$$=1 - (0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05) = 0{,}9997.$$

§ 3. Условная вероятность, формула Байеса

Случайные события A и B называются зависимыми, если появление одного из них, например, A изменяет вероятность появления другого события – B. Поэтому для зависимых событий используются два значения вероятности: *безусловная и условная вероятности*.

Если A и B зависимыесобытия, то вероятность наступления события B первым (т.е. до события A) называется *безусловной вероятностью* этого события и обозначается $P(B)$. Вероятность наступления события B при условии, что событие A уже произошло, называется *условной вероятностью* события B и обозначается $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Аналогичный смысл имеют безусловная – $P(A)$ и условная – $P(A/B)$ вероятности для события A.

Задача № 1. При обследовании заболеваний легких проверялось 10 000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек из этой группы являются постоянными курильщиками. У 1800 из курящих обнаружились серьезные нарушения в легких. Среди некурящих серьезные нарушения в легких имели 1500 человек. Являются ли события: курение и наличие нарушений в легких независимыми событиями?

Решение.

Обозначим через *A*событие состоящее в том, что наудачу выбранный человек оказывается постоянным курильщиком, и *B* – что у человека серьезные нарушения в легких. Тогда *P(A)* = 4000/10000 = 0,4 и *P(B)* = 3300/10000 = 0,33. Введем обозначение события *C* – это совместное появление событий *A* и *B*, т.е. человек, который является постоянным курильщиком и имеет серьезные нарушения в легких, вероятность появления данного события *P(C)* = =1800/10000 = 0,18. Условная вероятность курения при условии наличия нарушений в легких есть

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(C)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}33} \approx 0{,}55 \neq P(A).$$

Следовательно, события*A* и*B* являются зависимыми событиями, т.е. чем больше куришь, тем возрастает вероятность заболевания легких.

Теорема умножения вероятностейдля двух зависимых событий.

Теорема 1. Вероятность одновременного наступления двух зависимых событий*A* и*B* равна произведению безусловной вероятности первого события на условную вероятность второго:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A), \qquad (1)$$

если первым наступает событие *A*, или

$$P(A \text{ и } B) = P(B) \cdot P(A/B), \quad (2)$$

если первым наступает событие B.

УКАЗАНИЕ**.** Анализ и решение задач, рассмотренных по данной теме, можно осуществлять по следующей схеме:

1. Уясните, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Обозначьте буквами события, рассматриваемые в условиизадачи.
3. С помощью введенных обозначений выразите событие,вероятность наступления, которого необходимо найти.
4. Если требуется найти вероятность суммы событий, выясните,совместны или несовместны рассматриваемые события, если же требуется найти вероятность произведения событий, выясните, зависимы или независимы рассматриваемые события.
5. Выберите соответствующую условию задачи формулу и выполните необходимые вычисления.

Задача №2. В клетке имеются 3 белые и 4 черные крысы. Из нее извлекается одна за другой две крысы (событиеA и B). Найти вероятность $P(A \cdot B)$ того, что обе крысы окажутся белыми.

Решение.

Обозначим через $P(A)$ вероятность того, что первая крыса окажется белой, а через $P(B/A)$ условная вероятность того, что и вторая крыса окажется белой. Очевидно, $P(A) = \frac{3}{7}$, вычислим $P(B/A)$. Если первая крыса белая, то вторая выбирается из оставшихся 6 крыс, среди которых лишь *2* белые. Отсюда *P(B/A)* = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$. Искомую вероятность находим по формуле:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A),$$

получаем

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}.$$

Таким образом, вероятность того, что из клетки извлекут двух белых крыс, равна $\frac{1}{7}$.

Задача №3. В урне 3 черных шара и 7 белых. Найдите вероятность того, что из этой урныодин за другим(причем первый шар не возвращают в урну) будут вынуты 2 белых шара.

Решение. Вероятность достать первый белый шар (событие A) равна $\frac{7}{10}$. После того как он вынут, в урне остается 9 шаров, из них 6 белых. Тогда вероятность появления второго белого шара (событие B) равна $P(B/A) = \frac{6}{9}$, а вероятность достать подряд два белых шара равна

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0{,}47 = 47\%.$$

Приведенная теорема умножения вероятностей для зависимых событий допускает обобщение на любое количество событий. В частности, для трех событий, связанных друг с другом:

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB). \qquad (3)$$

Задача №4. В двух детских садах, каждый из которых посещает по 100 детей, произошла вспышка инфекционного заболевания. Доли заболевших составляют соответственно $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$, причем в первом учреждении 70 %, а во втором – 60 %

заболевших – дети младше 3-х лет. Случайным образом выбирают одного ребенка. Определите вероятность того, что:

1) выбранный ребенок относится к первому детскому саду (событие *A*) и болен (событие *B*).

2) выбран ребенок из второго детского сада (событие *C*), болен (событие *D*) и старше 3-х лет (событие *E*).

Решение.

1) искомая вероятность –

$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{100}{200} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1 = 10\%.$

2) искомая вероятность:

$P(C \text{ и } D \text{ и } E) = P(C) \cdot P(D/C) \cdot P(E/CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}05 =$

$=5\%.$

Формула полной вероятности

Предположим, что событие*A* может осуществляться только с одним из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Например, в аптечный пункт поступает один и тот же препарат от трех фармацевтических предприятий в разном количестве. Существует разная вероятность выпуска некачественного препарата на разных предприятиях. Случайным образом отбирается одно из изделий. Требуется определить вероятность того, что это изделие некачественное (событие *A*). Здесь события$B_1, B_2, \ldots, B_n$ — это выбор изделия из продукции соответствующего предприятия.

В этом случае вероятность события*B* можно рассматривать как сумму произведений событий

$$A = \sum_{i=1}^{n} AB_i$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$

Используя теорему умножения вероятностей, находим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$$

Данная формула носит название **формулы полной вероятности**.

Задача № 5. Пусть от первого предприятия поступило 20 препаратов, от второго — 10 препаратов и от третьего — 70 препаратов. Вероятности некачественного изготовления препарата на предприятиях соответственно равны 0,02; 0,03 и 0,05. Определить вероятность взятия некачественного препарата.

Решение.

Вероятности событий B_1, B_2, B_3 будут равны $P(B_1) = 0{,}2$; $P(B_2) = 0{,}1$; $P(B_3) = 0{,}7$. Используя формулу полной вероятности, находим

$$P(A) = 0{,}2\times0{,}02 + 0{,}1\times0{,}03 + 0{,}7\times0{,}05 = 0{,}042.$$

Формула Байеса

Пусть «n» несовместных случайных событий B_1, B_2, ..., B_n, образуют полнуюгруппу событий. Вероятности этих событий – $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$ известны и так как они образуют полную группу , то $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$.

Некоторое случайное событие A связано с событиями B_1, B_2, ..., B_n, причем известны условные вероятности появления события A с каждым из событий B_i , т.е. известны $P(A/B_1)$, $P(A/B_2)$, ..., $P(A/B_n)$. При этом сумма условных вероятностей $P(A/B_i)$ может быть не равна единице т.е. $\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \neq 1$.

Тогда условная вероятность появления события B_i при реализации события A (т.е. при условии, что событие A произошло) определяется формулойБайеса:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/Bi)}{P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + ... + P(B_n) \cdot P(A/B_n)}, \quad (4)$$

Причем для этих условных вероятностей $\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = 1$

Формула Байеса нашла широкое применение не только в математике, но и в медицине. Например, она используется для вычисления вероятностей тех или иных заболеваний. Так, если $B_1,\ldots, B_n$ – предполагаемые диагнозы для данного пациента, A – некоторый признак, имеющий отношение к ним (симптом, определенный показатель анализа крови, мочи, деталь рентгенограммы и т.д.), а условные вероятности $P(A/B_i)$ проявления этого признака при каждом диагнозе B_i (i= 1,2,3,…n) заранее известны, то формула Байеса (12) позволяет вычислить условные вероятности заболеваний (диагнозов) $P(B_i/A)$ после того как установлено, что характерный признак A присутствует у пациента.

Пример 1. При первичном осмотре больного предполагаются 3 диагноза B_1, B_2, B_3. Их вероятности, по мнению врача, распределяются так: $P(B_1) = 0,5$; $P(B_2) = {=}0,17$; $P(B_3) = 0,33$. Следовательно, предварительно наиболее вероятным кажется первый диагноз. Для его уточнения назначается, например, анализ крови, в котором ожидается увеличение СОЭ (событие A). Заранее известно (на основании результатов исследований), что вероятности увеличения СОЭ при предполагаемых заболеваниях равны:

$$P(A/B_1) = 0,1; P(A/B_2) = 0,2; P(A/B_3) = 0,9.$$

В полученном анализе зафиксировано увеличение СОЭ (событиеA произошло). Тогда расчет по формуле Байеса (4) дает значения вероятностей предполагаемых заболеваний при увеличенном значении СОЭ: $P(B_1/A) = {=}0,13$; $P(B_2/A) = 0,09$; $P(B_3/A) = 0,78$.

Полученные данные показывают, что с учетом лабораторных показателей наиболее реален не первый, а третий диагноз, вероятность которого теперь оказалась достаточно большой.

Приведенный пример – простейшая иллюстрация того, как с помощью формулы Байеса можно формализовать логику врача при постановке диагноза и благодаря этому создать методы компьютерной диагностики.

Пример 2. Определите вероятность, оценивающую степень риска перинатальной смертности ребенка у женщин с анатомически узким тазом.

Решение.

Пусть событие B_1 – благополучные роды. По данным клинических отчетов, $P(B_1) = 0{,}975 = 97{,}5$ %, тогда, если B_2 – факт перинатальной смертности, то $P(B_2) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025 = 2{,}5$ %.

Обозначим A – факт наличия узкого таза у роженицы. Из проведенных исследований известны: а) $P(A/B_1)$ – вероятность узкого таза при благоприятных родах, $P(A/B_1) = 0{,}029$, б) $P(A/B_2)$ – вероятность узкого таза при перинатальной смертности, $P(A/B_2) = 0{,}051$.

Тогда искомая вероятность перинатальной смертности при узком тазе у роженицы рассчитывается по формуле Байса (4) и равна:

$$P\,(B_2\,/\,A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2)} =$$

Таким образом, риск перинатальной смертности при анатомически узком тазе значительно выше (почти вдвое) среднего риска (4,4 % против 2,5 %).

Подобные расчеты, обычно выполняемые с помощью компьютера, лежат в основе методов формирования групп пациентов повышенного риска, связанного с наличием того или иного отягощающего фактора.

Формула Байеса очень полезна для оценки многих других медико-биологических ситуаций, что станет очевидным при решении приведенных в пособии задач.

§4. Повторные испытания, формула Бернулли

Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется ***схемой повторных независимых испытаний*** или ***схемой Бернулли***.

Примеры повторных испытаний:

1) многократное извлечение из урны одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета кладется обратно в урну;

2) повторение одним стрелком выстрелов по одной и той же мишени при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле принимается одинаковой (роль пристрелки не учитывается).

Итак, пусть в результате испытания возможны ***два исхода***: либо появится событие A, либо противоположное ему событие. Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события A в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях). Обозначим вероятность появления события A в единичном испытании буквой p, т.е. $p = P(A)$, а вероятность противоположного события (событие A не наступило) – буквой $q=P(\bar{A}) =1 - p$.

Тогда вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях ровно k раз, выражается ***формулой Бернулли***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p$$

Распределение числа успехов (появлений события) носит название ***биномиального распределения***.

Задача №5. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Решение.

Событие A – достали белый шар. Тогда вероятности

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(\overline{A}) = \frac{1}{3}.$$

По формуле Бернулли требуемая вероятность равна

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Задача №6. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение.

Вероятность рождения девочки $p = \frac{1}{2}$, тогда $q = \frac{1}{2}$.

Найдем вероятности того, что в семье нет девочек, родилась одна, две или три девочки:

$$P_5(0) = q^5 = \frac{1}{32}, \quad P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5}{32},$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{10}{32}, \quad P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{10}{32}.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) = \frac{13}{16}$$

Формула Пуассона

Часто интерес представляет случай большого числа n и малой вероятности p успеха в одном отдельном испытании. В этом случае удобно воспользоваться приближением Пуассона.

Теорема.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, близка к нулю, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит k раз, приближенно равна:

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\mu}}$$

где $\mu = np$.

Эта формула называется формулой Пуассона. Обычно приближенную формулу Пуассона применяют, когда $p < 0{,}1$, а $npq < 10$.

Функция $\frac{\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{m}}}{\boldsymbol{k}!}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\mu}}$ затабулирована, т.е. имеет таблицу.

Значения функции $\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$

k	μ			
	1	**2**	**5**	**8**
1	0,36	0,27	0,0337	0,0027
2	0,18	0,27	0,084	0,0107
3	0,06	0,18	0,14	0,028
5	0,0031	0,036	0,175	0,0916

Формула Пуассона используется в задачах, относящихся к редким событиям.

Задача №7. Пусть известно, что при изготовлении некоторого препарата брак (количество упаковок, не соответствующих стандарту) составляет 0,2%. Оценить приближенно вероятность того, что среди 1000 наугад выбранных упаковок окажутся три упаковки, не соответствующие стандарту.

Решение.

Выбор каждой очередной упаковки можно рассматривать как независимое испытание. Из условий задачи следует, что $n = 1000$ (т.е. велико), а $p = 0,002$ (т.е. мало), следовательно, A можно считать редким событием. $\mu = np = 1000 \cdot 0,002 = 2 < 10$.

Воспользуемся приближенной формулой Пуассона или таблицей.

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\mu}}$$

$$\mathrm{P}_{\mathbf{1000}}(\mathbf{3}) = \frac{\mathbf{2}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}!}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{1} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3}}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.18}}$$

По таблице: находим ячейку пересечения столбца μ =2 и строки k=3.

Глава 5. Случайные величины

§ 1. Дискретная случайная величина. Основные параметры дискретной случайной величины

Случайной величиной называется величина, которая при испытании случайно принимает одно значение из множества возможных значений. Например, вес и рост человека. Число родившихся мальчиков или девочек среди новорожденных и т.д. являются случайными величинами.

Различают два вида случайной величины: дискретная и непрерывная.

Случайная величина называется *дискретной*, если она может принимать определенные фиксированные значения, т.е. такое множество, элементы которого можно пронумеровать и выписать в последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Можно привести бесконечное число примеров дискретных случайных величин, в частности: число волос на теле человека; число вызовов, поступивших на станцию скорой помощи за сутки; число больных на приеме у врача за рабочий день; число рождаемых детей в городе за год.

Наиболее полную информацию о дискретной случайной величине дает закон распределения этой величины.

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ этой величины и их вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать с помощью *таблицы*: в первой строке в порядке возрастания перечислены все случайные величины, во второй – соответствующие им вероятности.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Такая таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины. События $X = x_1$, $X = x_2, \ldots$, $X = x_n$, состоящее в том, что в результате испытания случайная величина X примет соответственно значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, являются несовместными и единственно возможными (в таблице перечислены все возможные значения случайной величины), т.е. образуют полную группу. Следовательно, сумма их вероятностей равна 1. Таким образом, для любой дискретной случайной величины :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Такое равенство называется *условием нормировки дискретной случайной величины*.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически. Для чего в прямоугольной декартовой системе координат строят точки (x_k, p_k), т.е. по оси абсцисс откладывают значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности, соединяя полученные точки последовательно отрезками прямых, получается при этом ломаная линия, которая называется *многоугольником распределения* случайной величины X, график изображен на рис.7

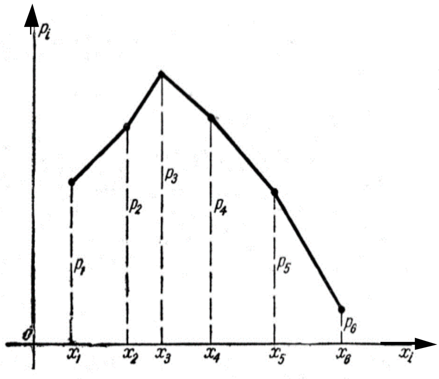

Рис.7.

УКАЗАНИЕ**.** Анализ и решение задач, в которых требуется составить таблицу распределения вероятностей случайной величины, рекомендуется делать по следующей схеме:

1. Установите, что является случайной величиной в рассматриваемой задаче.
2. Перечислите все возможные значения случайной величины.
3. Из условия задачи установите закон распределения вероятностей случайной величины.
4. Используя соответствующую формулу, найдите вероятности появления возможных значений случайной величины.

5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины и проверьте, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Задача №1. Задают ли закон распределения дискретной случайной величины, следующие таблицы:

а)

x_i	6	7	8	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,5

б)

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение. Первая таблица задает закон распределения дискретной случайной величины, поскольку выполняется условие нормировки: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, т.е. 0,1 + 0,4 + 0,3 + 0,2 = 1.

Вторая таблица не задает закон распределения дискретной случайной величины, так как не выполняется условие нормировки дискретной случайной величины:

0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,5 ≠ 1.

Задача №2.Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p_i	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

Чему равна вероятность $p_4 = P(x_4 = 0{,}8)$? Построить прямоугольник.

Решение. Поскольку должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \text{ т.е. } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1,$$

$$0,1 + 0,2 + 0,4 + p_4 + 0,1 = 1,$$

таким образом, вероятность появления четвертой случайной величины будет выражать с помощью формулы $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,1) = 0,2$.

Закон распределения данной дискретной случайной величины будет иметь вид:

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Зная закон распределения дискретной случайной величины, можем построить многоугольник распределения, который представляет собой ломаную линию, график изображен на рис.8.

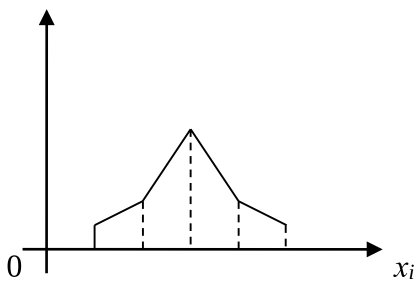

Рис.8.

Задача №3. В коробке *7* карандашей, из которых *4* красного цвета. Из этой коробки наудачу извлекаются два карандаша. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу красных карандашей в выборке.

Решение. Испытанием является извлечение карандашей $n = 7$, в данной задаче два события: A_1 – извлечение первого красного карандаша, A_2 – извлечение второго красного карандаша, всего красных карандашей в коробке $m = 4$. В выборке из двух карандашей может не оказаться ни одного красного карандаша, может появиться один или два. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $0, 1, 2$.

Найдем вероятности этих значений:

$$p_1 = P(x_1 = 0) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2/\bar{A}_1) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{7};$$

$$p_2 = P(x_2 = 1) = P(\bar{A}_1A_2) + P(A_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)\,P(A_2/\bar{A}_1) +$$

$$+P(A_1)\,P(\bar{A}_2/A_1) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{4}{7};$$

$$p_3 = P(x_3 = 2) = P(A_1A_2) = P(A_1)\,P(A_2/A_1) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{7}.$$

Отметим, что $\frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = 1$, т.е выполняется условие нормировки дискретной случайной величины. Таким образом, закон распределения данной случайной величины можно задать таблицей:

x_i	0	1	2
p_i	1/7	4/7	2/7

Основными параметрами дискретной случайной величины являются: математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений x_iнаих вероятностиp_i, т.е. $M(X) = = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Математическое ожидание – это характеристика среднего значения дискретной случайной величины *X*.

Дисперсией D(X) случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$

Дисперсия дискретной случайной величины *X* характеризует степень рассеивания (группирование) возможных значений случайной величины относительно математического ожидания *M(X)* и имеет размерность квадрата случайной величины.

Значение арифметического корня $\sqrt{D(X)}$ называется *среднеквадратическим отклонением* случайной величины *X* и обозначается $\sigma(X)$, которую можно вычислить по формуле: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Среднеквадратическое отклонение имеет размерность случайной величины и как дисперсия группирование возможных значений случайной величины около математического ожидания.

Задача № 1. В коробке лежат пронумерованные шары: три шара с цифрой *2*; два шара с цифрой *4*; пять шаров с цифрой *6*. Составьте закон распределения, постройте многоугольник распределения величины *X* – цифра, написанная на шаре. Найдите основные параметры дискретной случайной величины.

Решение. Вычислим вероятности появления случайных величин и заполним таблицу, случайными величинами будут являться $x_1= 2, x_2=4, x_3=6$. Так как в коробке всего *10* шаров, тогда вероятности появления случайных величин будут равны соответственно: *0,3*; *0,2*; *0,5*. Теперь можем составить закон распределения:

x_i	2	4	6
p_i	0,3	0,2	0,5

Построим многоугольник распределения: отложим по оси абсцисс возможные значения случайной величины, а именно $x_1= 2, x_2=4, x_3=6$, а по оси ординат соответствующие им вероятности: *0,3*; *0,2*; *0,5*, график изображен на рис.9.

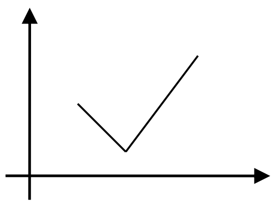

Рис.9

Зная значения случайной величины, а также и вероятности появления их, находим основные параметры дискретной случайной величины:

$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot$ $0{,}5 = 4{,}4;$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - M(X))^2 p_i = (x_1 - M(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - M(X))^2 \cdot p_2 +$$

$$+ (x_3 - M(X))^2 \cdot p_3 =$$

$$= (2 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (4 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (6 - 4{,}4)^2 \cdot 0{,}5 = 3{,}04;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}04} \approx 1{,}7.$$

До сих в качестве исчерпывающего описания дискретной случайной величины мы рассматривали ее закон распределения, представляющий собой ряд распределения или формулу, позволяющие находить вероятности любых значений случайной величины X. Однако такое описание не является единственным, а, главное, не универсально. Для описания закона распределения величины X возможен и другой подход: рассматривать не вероятности событий $X = x$ для разных x (как это имеет место в ряде распределения), а вероятности события $X < x$, где x – текущая переменная. Вероятность $P(X < x)$, очевидно, зависит от x, т.е. является некоторой функцией от x.

Функцией распределения дискретной случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию $F(x)$ иногда называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения.*

Рассмотрим свойства функции распределения:

1. *Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:*

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. *Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.*

3. *На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице:*

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Задача № 2. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти функцию распределения этой случайной величины и построить график.

Решение.

Для построения функции распределения *F(x)* дискретной случайной величины *X* воспользуемся формулой: $F(x)= \sum\limits_{x_K \le X} P(X = x_к)$.

1. При $x \le 0$ $F(x) = \sum\limits_{x_K < 0} P(X = x_к) = 0$.

2. При $0 < x \le 1$ $F(x) = \sum\limits_{x_K < 1} P(X = x_к) = P(X = 0) = 0,2$.

3. При $1 < x \le 2$ $F(x) = \sum\limits_{x_K < 2} P(X = x_к) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2 + 0,4 = 0,6$

4. При $2 < x \le 3$ $F(x) = \sum_{x_K<3} P(X = x_к) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}9.$

5. При $x > 3$ $F(x) = \sum_{x_K \ge 3} P(X = x_к) = P(X = 0) + P(X = 1) +$

$+ P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1.$

Таким образом, функция распределения *F(x)* дискретной случайной величины *X* будет иметь вид:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & если\ x \le 0, \\ 0{,}2, & если\ \ 0 < x \le 1, \\ 0{,}6, & если\ \ 1 < x \le 2, \\ 0{,}9, & если\ \ 2 < x \le 3, \\ 1, & если\ \ x > 3. \end{cases}$$

График функции *F(x)* изображен на рис.4.

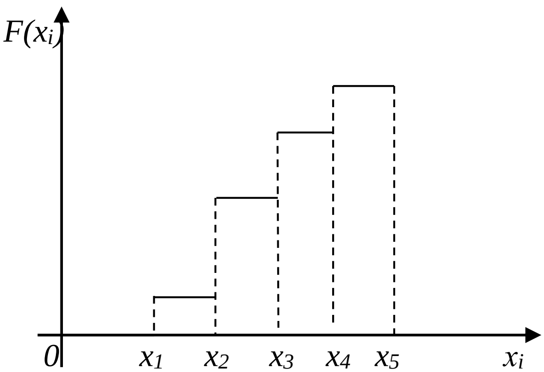

Рис.10.

Этот пример позволяет прийти к утверждению, что функция распределения любой дискретной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. Сумма этих скачков функции $F(x)$ равна 1.

§2. Непрерывная случайная величина. Основные параметры непрерывной случайной величины

Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принимать любые значения в заданном интервале (в некоторых областях плоскости или пространства).

Эти значения образуют несчетное бесконечное множество. Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна 0. В отличие от дискретной случайной величины непрерывную случайную величину невозможно выписать в последовательность и пронумеровать. Непрерывную случайную величину можно описать функциями: функцией распределения и функцией плотности вероятности.

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины – это непрерывная функция, показывающая вероятность того, что случайная величина принимает значения меньшие или равные значению x, т.е. $F(x) = P(X \leq x)$.

Функцией плотности вероятности *f(x)* непрерывной случайной величины X называется производная функции распределения:

$$f(x)=F^{'}(x).$$

График функции плотности вероятности*f(x)* называется *кривой распределения.*

Задача №1. Функция распределения случайной величины *X* имеет вид:

$$F(X)=\begin{cases} 0, & при\ \ x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & при\ \ x>0. \end{cases}$$

Найти ее плотность распределения.

Решение. Плотность распределения *f(x)* и функция распределения *F(x)* связаны соотношением *f(x) = F'(x).*

В соответствии с равенством находим:

$f(x) = F'(x) =$

$$\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x(1+x^2)-2x\cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,при\ \ x>0$$

$f(x) = F'(x) = 0$ *при* $x \le 0.$

Итак, плотность распределения вероятностей данной случайной величины определяется функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, & при\ \ x>0.\end{cases}$$

Задача №2. Найти функцию распределения *F(x)* случайной величины *X*, плотность вероятности которой определена функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ x, & при\ \ 0<x\le 1,\\ 2-x, & при\ \ 1<x\le 2,\\ 0, & при\ \ x>2.\end{cases}$$

Решение. Чтобы найти функцию распределения *F(x)*, воспользуемся формулой:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

При $x\le 0$ получаем $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx=0$

При $0<x\le 1$ находим

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x} xdx=0+\frac{x^2}{2}\Big|_0^x=\frac{x^2}{2}$$

При $1<x\le 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} xdx+$$

$$+\int_{1}^{x}(2-x)dx=0+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+$$

$$+(2x-\frac{x^2}{2})\Big|_1^x=\frac{1}{2}+(2x-\frac{x^2}{2})-(2-\frac{1}{2})=-\frac{x^2}{2}+2x-1.$$

При $x > 2$ получаем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{x} f(x)dx=F(2)+\int_{2}^{x} 0dx=1$$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(X)=\begin{cases} 0, & \text{\textit{при}}\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{\textit{при}}\ 0<x\le 1,\\ \dfrac{x^2}{2}+2x-1, & \text{\textit{при}}\ 1<x\le 2,\\ 1, & \text{\textit{при}}\ x>2. \end{cases}$$

Вероятность того, что величина X находиться на промежутке от a до b может быть найдена по формуле:

$$P(a\le x\le b)=\int_{a}^{b} f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Вероятность попадания величины X на участок *(a;b)* равна площади кривой распределения, опирающейся на этот участок.

Задача №3. Плотность распределения случайной величины X задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала *(1,2)*.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Таким образом, получаем

$$P(1 \le x \le 2) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Определенный интеграл в пределах от -∞ до +∞ функции плотности вероятностей непрерывной случайной величины равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

это есть условие нормировки непрерывной случайной величины.

Задача №4. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ ax^2, & при\ \ 0<x\le 2,\\ 0, & при\ \ x>2.\end{cases}$$

Определить коэффициент *a*, найти интегральную функцию распределения.

Решение. Пользуясь условием нормировки непрерывной случайной величины, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, можем найти коэффициент *a*. Так как при *x < 0* и при *x > 2* функция *f(x) = 0*, то предел интегрирования будет от *0* до *2*:

$$\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2 ax^2dx=a\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=a(\frac{2^3}{3}-0)=\frac{8}{3}a.$$

Таким образом,

$$\frac{8}{3}a=1,\ a=\frac{3}{8}.$$

Значит, функция плотности вероятности будет иметь вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \frac{3}{8}x^2, & при\ \ 0<x\le 2,\\ 0, & при\ \ x>2.\end{cases}$$

Основные параметры непрерывной случайной величины

Основными параметрами непрерывной случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание *M(X)* непрерывной случайной величины *X*, все значения которой принадлежат отрезку *(-∞;+∞)*, а *f(x)* – ее плотность вероятностей, определяется формулой:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Дисперсия *D(X)* непрерывной случайной величины *X* определяется по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Задача №5. Найти основные параметры *M(X),D(X),* $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины *X,* заданной плотностью вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 0,\\ 2x, & при \quad 0<x\le 1,\\ 0, & при \quad x>1.\end{cases}$$

Решение. С помощью формул нахождения основных параметров непрерывной случайной величины находим:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 2x\cdot xdx=\int_0^1 2x^2dx\frac{2}{3}\cdot x^3\ \Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))dx=\int_0^1(x-\frac{2}{3})^2\cdot 2xdx=\int_0^1(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9})2xdx=\int_0^1(2$$

$$-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{9}x)dx=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{8}{9}x^3+\frac{4}{9}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}\approx 0{,}24.$$

В теории вероятностей *нормальный закон распределения* имеет фундаментальное значение. Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют *нормальным*, если плотность вероятности определяется формулой:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ (\sigma>0)$$

где m - математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение.

Данная формула выражает плотность распределения нормального закона (закона Гаусса), играющего огромную роль в медико-биологических наблюдениях и экспериментах.

Кривая распределения по нормальному закону имеет симметричный холмообразный вид (кривая Гаусса), график изображен на рис.11.

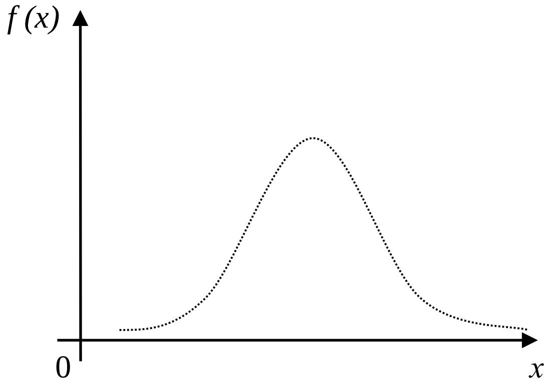

Рис.11

Обратим внимание на то, что нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = m$, таким образом, максимальная ордината кривой будет равна, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ соответствующая точке $x = m$.

Выясним, как будет меняться нормальная кривая при изменении параметров m и σ. Если σ = const, и меняется параметр m ($m_1 < m_2 < m_3$), т.е центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы.

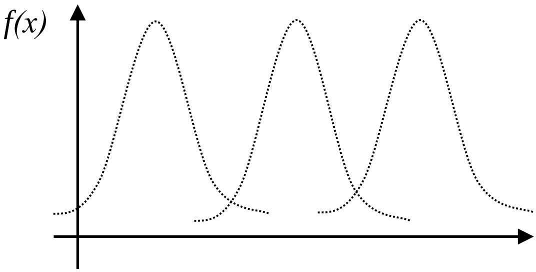

Рис.12

Если m= const, и меняется параметр σ, то меняется ордината максимума кривой $f_{max}(m) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При увеличении σ ордината максимума кривой уменьшается, но так как площадь под любой кривой распределения должна оставаться равной единице, то кривая становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ, напротив, нормальная кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. На рис.13 показаны нормальные кривые с параметрами σ_1, σ_2, σ_3, где $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

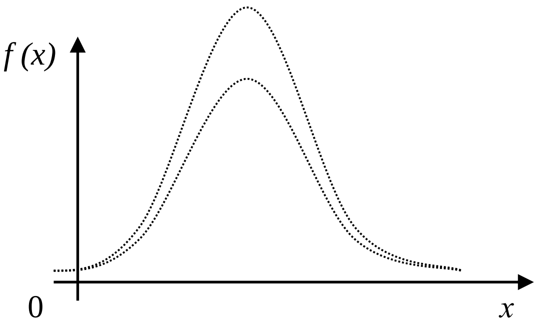

Рис. 13

Таким образом, параметр m (математическое ожидание) характеризует положение центра, а параметр σ – форму нормальной кривой.

Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами m= 0 и σ = *1* называется нормированным. Равномерное распределение вероятностей является простейшим и может быть как дискретным, так и непрерывным. Дискретное равномерное распределение – это такое распределение, для которого вероятность каждого из значений СВ одна и та же, то есть:

$$P(x) = \frac{1}{N},$$

где N – количество возможных значений СВ.

Распределение вероятностей непрерывной СВ X, принимающие все свои значения из отрезка [a;b] называется равномерным, если ее плотность вероятности на этом отрезке постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & при \quad a \le x \le b, \\ 0, & при \quad x > b. \end{cases}$$

Задача №6. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно *3* и среднее квадратическое отклонение равно *2*. Напишите функцию плотности вероятности.

Решение. Из условия следует, что непрерывная случайная величина задана нормально с параметрами *m = 3* и *σ= 2*, тогда используя формулу:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Находим плотность распределения данной случайной величины:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$$

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины *X* в интервал *(a;b)* определяется формулой:

$$P(a \le x \le b) = \Phi\left(\frac{в-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

где *Φ(x)* – функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Функция Лапласа *Φ(x)* является интегрированной и табличной функцией, но прежде, чем пользоваться таблицей необходимо внимательно посмотреть значения какой функции даны в таблице. Дело в том, что в некоторых учебниках по теории вероятности функция Лапласа имеет другой вид, а именно:

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad \Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, для которых и составлены соответствующие таблицы.

Задача №7. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Причем математическое ожидание равно *10*, а дисперсия равна *4*. Найти вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервалы:

1) $(12 \le x \le 14)$; $2)(8 \le x \le 12)$.

Решение.

Из условия следует, что $m = 10, \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2$.

В соответствии с формулой:

$$P(a \le x \le b) = \Phi\left(\frac{в-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

с помощью таблицы функции Лапласа, приведенной в конце данной методички, находим вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервалы (12; 14) и (8; 12):

1) $P(12 \le x \le 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1)$ $\approx =0,48 - 0,34 = 0,14$;

2) $P(8 \le x \le 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{8-10}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$ $=2\Phi(1) \approx 2\cdot 0,34 = 0,68$.

При решении данной задачи были использованы соответствующие значения функции Лапласа и нечетность этой функции

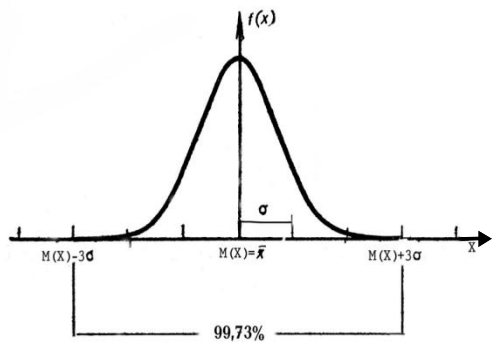

Рис. 14

На практике часто приходиться вычислять вероятности попадания значений нормально распределенной случайной величины на участки, симметричные относительно $M(X)$. В частности, рассмотрим следующую, важную в прикладном отношении задачу. Отложим от $M(X)$ вправо и влево отрезки, равные σ, 2 σ и 3 σ (рис. 14) и проанализируем результат вычисления вероятности попадания X в соответствующие интервалы:

$$P(M(X) - \sigma < X < M(X) + \sigma) = 0{,}6827 = 68{,}27\ \%.$$

$$P(M(X) - 2\sigma < X < M(X) + 2\sigma) = 0{,}9545 = 95{,}45\ \%.$$

$$P(M(X) - 3\sigma < X < M(X) + 3\sigma) = 0{,}9973 = 99{,}73\ \%.$$

Из последней формулы следует: практически достоверно, что значения нормально распределенной случайной величины X с параметрами $M(X)$ и σ лежат в интервале $M(X) \pm 3\sigma$. Иначе говоря, зная $M(X) = \overline{X}$ и σ, можно указать интервал, в который с вероятностью P

= 99,73% попадают значения данной случайной величины. Такой способ оценки диапазона возможных значений X известен как «правило трех сигм».

Задача № 8. Известно, что для здорового человека *p*H крови является нормально распределенной величиной со средним значением (математическим ожиданием) 7,4 и стандартным отклонением 0,2. Определите диапазон значений этого параметра.

Решение: для ответа на этот вопрос воспользуемся “правилом трех сигм”. С вероятностью равной 99,73% можно утверждать, что диапазон значений *p*H для здорового человека составляет 6,8 – 8.

Глава 6. Элементы математической статистики

§ 1. Основные понятия математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, разрабатывающий рациональные приемы обработки данных, полученных в массовых явлениях. Массовые явления это многократно повторяющиеся процессы в одних и тех же условиях.

Выборочным методом статистического наблюдения называется метод, при котором для отыскания типичных характеристик какой-нибудь совокупности изучаются не все единицы данной совокупности, а лишь их часть.

Множество объектов, характеризуемых некоторым качественным или количественным признаком, называется *статистической совокупностью*.

В практике статистических наблюдений различают два вида наблюдений: *сплошное*, когда изучаются все объекты совокупности, и *несплошное*, выборочное, когда изучается часть объектов. Примером сплошного наблюдения является перепись населения, охватывающая все население страны. Выборочными наблюдениями является, например. Проводимые социологические исследования, охватывающие часть населения страны, области, района и т.д.

Вся подлежащая изучению совокупность объектов (наблюдений) называется генеральной совокупностью. Та часть объектов, которая отобрана для непосредственного изучения из генеральной совокупности, называется выборочной совокупностью, или выборкой. Числа объектов в генеральной или выборочной совокупности называются их объемами. Выборку можно рассматривать как некий эмпирический аналог генеральной совокупности. Сущность выборочного метода состоит в том, чтобы по некоторой части генеральной совокупности (по выборке) выносить суждение о ее свойствах в целом.

В большинстве случаев проводятся выборочные исследования частей генеральных совокупностей (например, из материалов о больных с профессиональными заболеваниями отбирается каждая 5-ая или 10-ая статистическая карта, или производится разбивка коллектива на однотипные группы, из которых осуществляется случайный отбор единиц наблюдения и т.д.). Таким образом, отбор единиц совокупности производится с таким расчетом, чтобы по части можно судить о целом, т. е. чтобы в отобранную часть вошли все виды изучаемого явления и притом в таком же примерно соотношении, в каком они находятся в генеральной совокупности.

Одним из основных требований, предъявляемых к выборке, является обязательность максимального отражения всех черт генеральной совокупности или, иначе, выборочная совокупность должна быть представительной - *репрезентативной*.Например, если при изучении заболеваемости населения республики (генеральная совокупность) ишемической болезнью сердца в качестве выборки будет взята группа студентов, то результаты окажутся ошибочны, поскольку свойства выборки не будут соответствовать свойствам генеральной совокупности, как и в случае, когда в качестве выборки будут взяты только пациенты кардиологического диспансера.

Репрезентативность выборки обеспечивается ее достаточным объемом и определенными правилами ее формирования, которые в данном пособии не рассматриваются.

Из многочисленных **задач**, решаемых математической статистикой, выделим следующие.

1. Определение статистических характеристик выборки (методы описательной статистики).
2. Определение параметров генеральной совокупности по данным выборки: точечные оценки и доверительные интервалы для параметров распределения.
3. Исследование статистической связи между двумя признаками выборочной совокупности (элементы корреляционного анализа).
4. Определение значимости различия между двумя выборочными совокупностями (введение в теорию статистических гипотез).

Наиважнейшая проблема математической статистики, решаемая с помощью теории вероятностей - выяснение закона распределения по данным выборки. Задача нахождения закона распределения изучаемой величины сводится к нахождению неизвестных значений - параметров. В теории вероятностей доказывается, что, когда число измерений достаточно велико, то почти все распределения асимптотически приближаются к нормальному.

§ 2. Статистическое распределение выборки

В серии экспериментов, проводимых с выборкой, величина X принимает определенные значения. Эти значения записанные для всех элементов выборки в том порядке, в котором они были получены в опытах, представляет собой *простой статистический ряд.* Каждое значение X в полученном числовом ряду называют *вариантой*. Полученные данные и подлежат статистической обработке, статистическому анализу.

Первый шаг при обработке этого материала – наведение в нем определенного порядка, ведущего к получению статистического распределения выборки. Здесь возможны два основных способа: создание вариационного ряда или интервального ряда.

Рассмотрим *вариационный ряд*. Пусть некоторая выборка исследуется по количественному признаку X, который представляет собой дискретную случайную величину. В имеющемся у нас простом статистическом ряду варианта x_1 встречается (повторяется) m_1 раз, x_2 – m_2 раза, ... $x_к$ – $m_к$ раз, при этом $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, т.е. равна объему выборки. Далее по данным простого статистического ряда строится статистическоераспределение(в медицинской литературе – *вариационный ряд*), которое удобно представить в виде таблицы, включающей в себя:

1) различные по значению варианты x_i, расположенные в определенной, ранжированной, заранее выбранной последовательности (обычно в порядке возрастания);

2) m_i – частоты вариант, т.е. числа наблюдений (повторений) варианты x_i в простом статистическом ряду;

3) $p_i^*=m_i/n$ – относительные частоты вариант, т.е. отношения частот m_i к объему выборки n; они являются выборочными (эмпирическими) оценками вероятностей появления значений x_i.

Каждая относительная частота указывает долю общего объема выборки, приходящуюся на данное значение варианты x_i.

Для дискретной величины Xвариационный ряд – статистическое распределение выборки – имеет следующий вид (табл. 1).

Таблица 1

Варианта x_i ($x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_k$)	x_1	x_2	x_3		x_k	Контроль
Частота m_i	m_1	m_2	m_3		m_k	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$
Относительная частота $p_i^* = \frac{m_i}{n}$	$\frac{m_1}{n}$	$\frac{m_2}{n}$	$\frac{m_3}{n}$		$\frac{m_k}{n}$	$\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1$

Напомним, что под распределением дискретной случайной величины в теории вероятностей понимается соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями; в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами x_i и их частотами или относительными частотами.

Пример 1. Анализируемый показатель X – срок лечения больного при некотором заболевании. Вариационный ряд – распределение больных по срокам лечения (объем выборки n = 26 больных) – имеет вид:

Таблица 2

x_i– число дней лечения	17	18	20	22	23	25	контроль
m_i– число больных с данным сроком лечения (частота)	2	5	4	8	5	2	$\sum_{i=1}^{6} m_i = 26$
$p_i^* = \frac{m_i}{n}$ – относительная частота	0,08	0,19	0,15	0,30	0,19	0,08	$\sum_{i=1}^{6} \frac{m_i}{n} = 1$

Полезность подобного представления данных очевидна по следующей причине: мы получаем практически важный результат – возможность оценить более и менее вероятные значения признака.

Интервальный ряд удобен тогда, когда количественный признак X, характеризующий выборку, непрерывен, т.е. может принимать любые значения в некотором интервале. В этом случае статистическое распределение выборки (интервальный ряд) строится следующим образом. Область изменения признака ($x_{макс} - x_{мин}$) разбивают на несколько интервалов обычно равной ширины. Число интервалов k, как правило, не менее 5 и не более 25 и приближенно определяется следующими эмпирическими формулами:

$$k = \sqrt{n},$$

где n– объем выборки.

Ширина интервалов одинакова и равна:

$$\Delta x = h = \frac{x_{макс} - x_{мин}}{k}.$$

Затем вычисляют границы интервалов: $x_{мин} = x_0$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h, \ldots$, $x_{макс} = x_k$. Поскольку некоторые варианты могут являться границей двух соседних интервалов, то, во избежание недоразумений, придерживаются следующего правила: к интервалу (a,b) относят варианты, удовлетворяющие неравенству $a < x < b$.

Затем для каждого интервала подсчитывают частоты m_i и (или) относительные частоты $p_i^* = m_i/n$ попадания вариант в данный интервал. Нередко используют также плотность относительной частоты: *Таблица* 3.

$$\frac{m_i}{n\,\Delta x} = \frac{m_i}{n\,h}.$$

Данную величину можно считать выборочной (эмпирической) оценкой плотности вероятности.

Интервал	x_0–x_1	x_1–x_2	x_2– x_3	. . .	x_{k-1} – x_k
Частота m_i	m_1	m_2	m_3	. . .	m_k
Относительная частота $p_i^*=m_i/n$	m_1/n	m_2/n	m_3/n	. . .	m_k/n

Рассмотренное выборочное распределение непрерывной случайной величины X – интервальный ряд – обычно представляется в виде таблицы, имеющей, в частности, следующий вид (табл. 3).

Пример 2. Анализируемый показатель X – массы тела новорожденного. Определение массы тела 100 новорожденных показало, что минимальная масса составляет 2,7 кг, максимальная – 4,4 кг. Интервал (2,7 – 4,4) кг разбиваем на 10 равных интервалов ($k = \sqrt{100} = 10$) шириной $h = \dfrac{4{,}4-2{,}7}{10} = 0{,}17$ кг и строим интервальный ряд (табл. 4):

Таблица 4

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Интервал,масса тела, кг	2,7–2,87	2,87 – 3,04	3,04 – 3,21	3,21 – 3,38	3,38 – 3,55	3,55 – 3,72	3,72 – 3,89	3,89 – 4,06	4,06 – 4,23	4,23 –4,4
Частота m_i	4	8	12	16	21	15	11	7	4	2
$m_i/n = p_i^*$	0,04	0,08	0,12	0,16	0,21	0,15	0,11	0,07	0,04	0,02
m_i/nh	0,24	0,47	0,7	0,94	1,24	0,88	0,65	0,41	0,24	0,12

Контроль: k=10,

$$\sum_{i=1}^{10} m_i=4+8+12+16+21+15+11+7+4+2=100=n$$ (объем выборки), $\sum_{i=1}^{10} \frac{m_i}{n}$

0,04+0,08+0,12+0,16+0,21+0,15+0,11+0,07+

+0,04+0,02 = 1.

Обобщим изложенный выше материал.

1. Если выборка исследуется по количественному признаку *X*, который представляет собой дискретную случайную величину, то статистическим распределением выборки является вариационным статистический ряд – полученные значения признака, записанные в упорядоченном виде с указанием их частот и относительных частот.

2. Если выборка исследуется по количественному признаку *X*, который представляет собой непрерывную случайную величину, то статистическим распределением выборки является интервальный статистический ряд. Он включает в себя интервалы вариант, частоты попадания вариант в эти интервалы, относительные частоты, при необходимости – плотности относительных частот для этих интервалов.

Для получения наглядного представления о распределении выборок строят соответствующие графики, в частности, полигон частот или гистограмму распределения.

Вариационный ряд часто изображают графически в виде **полигона частот** или **полигона относительных частот**.

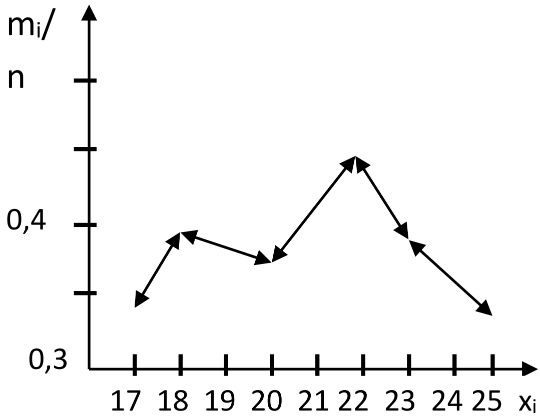

Рис.1.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты m_i. Точки $(x_i;m_i)$ соединяют отрезками прямых. *Полигоном частотназывают ломаную линию, отрезки которой соединяют точки* $(x_1;m_1)$; $(x_2; m_2)$.....$(x_к; m_к)$.

Полигоном относительных частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\frac{m_1}{n})$; $(x_2;\frac{m_2}{n})$; …; $(x_к;\frac{m_k}{n})$. На рис. 1 показан полигон относительных частот, построенный по данным табл.2.

Для непрерывной случайной величины обычно строят **гистограммы частот** или **относительных частот**.

Гистограммой частот называют диаграмму, состоящую из вертикальных прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длиной $\Delta x = h$, *высоты равны отношению* $\frac{m_i}{\Delta x}$ *(плотности частоты).* Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают интервалы значений исследуемого показателя (интервалы вариант) и на них строят прямоугольники высотой $\frac{m_i}{\Delta x}$. Площадь i-го прямоугольника равна $\Delta x \cdot \frac{m_i}{\Delta x} = m_i$, т.е. равна количеству вариант в i-м интервале. Следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме частот для всех интервалов, иначе говоря, равна объему выборки.

Гистограмма относительных частот отличается от предыдущей гистограммы тем, что на ней высоты прямоугольников равны отношению $\frac{m_i}{n\,\Delta x}$, т.е. равны плотности относительной частоты (эмпирической плотности вероятности). В этом случае площадь i-го прямоугольника равна $\Delta x \cdot \frac{m_i}{n\,\Delta x} = p_i^*$ – относительной частоте вариант, попавших в i-ый интервал. Напомним, что p_i^* – оценка вероятности попадания значений X в выбранный интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме относительных частот для всех интервалов, т.е. равна единице.

Гистограмма относительных частот, построенная по данным табл.4, приведена на рис. 2. Из этого рисунка следует, что для используемой выборки интервал наиболее вероятных масс тела новорожденных (3,38 - 3,55) кг.

Необходимо отметить, что гистограммой называют и серию прямоугольников, высотами которых являются непосредственно частоты m_i для соответствующих

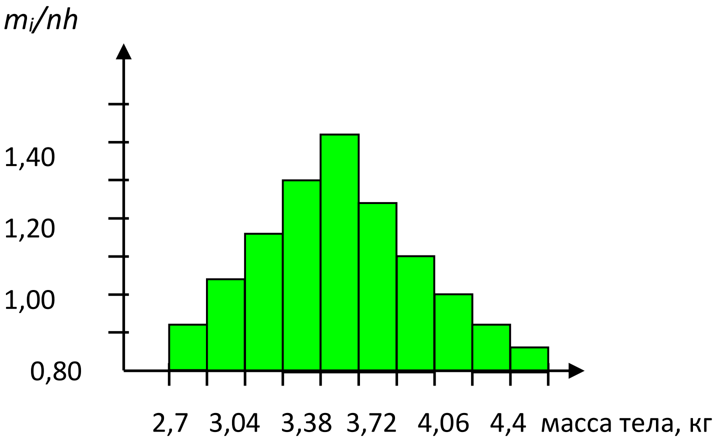

*Рис.*2.

интервалов, или относительные частоты (в нормированной гистограмме), а также относительные частоты в процентах (процентная гистограмма). Два последние варианта позволяют сравнивать гистограммы, построенные на одних и тех же интервалах, но для различных выборок из той же генеральной совокупности.

Важно, что гистограммы можно использовать для оценкизакона распределенияпризнака в генеральной совокупности (в популяции). Соединяя средние точки верхних оснований прямоугольников гистограммы относительных частот плавной линией, можно по данным выборки получить примерный вид графика зависимости плотности вероятности f от x. Такая зависимость отражена на рис. 2. Можно предположить, что анализируемый показатель (масса тела новорожденного) в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, т.е. нормальный закон является вероятностной моделью для данного признака популяции.

§ 3. Методы описательной статистики

Это методы описания выборок, исследуемых по количественному признаку X, с помощью их различных числовых характеристик.

Преимущество данных методов заключается в следующем. Несколько простых и достаточно информативных статистических показателей, если они известны, во-первых, избавляют нас от просмотра сотен, а порой и тысяч значений вариант, а, во-вторых, позволяют получить более или менее точную оценку характеристик распределения признака в генеральной совокупности.

Описывающие выборку показатели разбиваются на несколько групп; в своем большинстве они имеют аналоги в виде числовых характеристик случайных величин в теории вероятностей.

Показатели положения описывают положение вариант выборки на числовой оси. Сюда относят:

а) минимальную и максимальную варианту;

б) выборочное среднее арифметическое значение (выборочное среднее), выборочные моду и медиану. Они определяют «центральную» точку распределения выборки: наиболее значимую для поставленной задачи варианту.

Выборочным средним называется величина

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (1)$$

где x_i– i-ая варианта, полученная в опыте с i-ым элементом выборки; n – объем выборки.

Так, согласно данным табл.4 среднее выборочное значение массы тела новорожденных – $\overline{x}_в$ = 3,47 кг и относится к центральному интервалу (интервалу наиболее вероятных значений).

Выборочная мода $Mo_в$ – варианта, которая чаще всего встречается в исследуемой выборке, т.е. имеет наибольшую частоту.

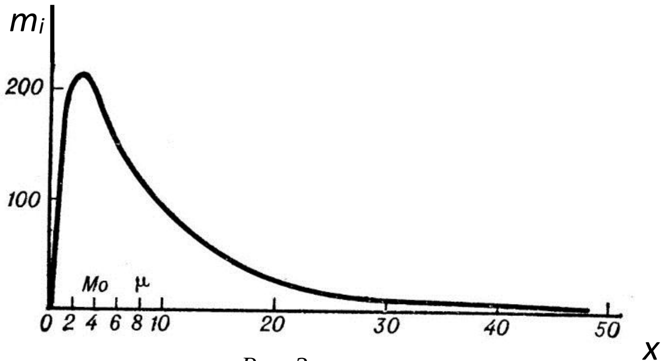

Рис. 3

Пример 1. На рис. 3 приведено предполагаемое распределение по возрасту заболевших дифтерией (на 10 тыс. населения соответствующего возраста), которое явно не соответствует нормальному. Очевидно, что знание среднего возраста заболевших ($\overline{x}_в$≈ 7,8 года) в этом случае менее важно, чем знание возраста, в котором чаще всего возникает заболевание и который представляет собой моду ($Mo_в \approx$ 4 года). Именно этот показатель указывает где должны быть сосредоточены главные профилактические меры: в школах или дошкольных учреждениях.

Выборочная медиана $Me_в$ – варианта, которая делит ранжированный статистический ряд на две равные части по числу попадающих в них вариант.

Пример 2. Дан статистический ряд: 1; 2; 3; 3; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 9; n = 11. Варианта, разделяющая этот ряд на две равные по количеству вариант части, занимает в ряду 6 место и равна 6, т.е. $Me_в$ = 6.

Показателиразброса описывают степень разброса данных относительно своего центра. Здесь обычно используются:

а) *стандартноеотклонение*S и *выборочнаядисперсия*$D_в = S^2$, характеризующие рассеяние вариант вокруг их среднего выборочного значения $\overline{x}_в$:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_B)^2}{n-1}}; \qquad (2)$$

б) *размах выборки* – разность между максимальной и минимальной вариантами: $x_{макс} - x_{мин}$;

в) *коэффициент вариации*:

$$V = \frac{S}{\overline{x}_в} \cdot 100\%, \qquad (3)$$

который применяется для сравнения величин рассеяния двух вариационных рядов: тот из них имеет большее рассеяние, у которого коэффициент вариации больше.

Кпоказателям, описывающим закон распределения, прежде всего, относят *гистограммы* и *полигон частот*.

§ 4. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке

Напомним, что главная цель любого статистического исследования – установить закон распределения и получить значения характеристик изучаемого признака генеральной совокупности путем анализа выборки. Иначе говоря, надо определить генеральную среднюю $\overline{x}_г = M(X)$, генеральные дисперсию$D_г(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_г$, генеральную моду $Mo_г$, медиану $Me_г$ и другие характеристики генеральной совокупности путем статистического исследования выборки.

Точечная оценка характеристик генеральной совокупности – наиболее простой, но не очень достоверный способ. При данном способе в качестве оценок характеристик генеральной совокупности используются соответствующие числовые характеристики выборки. Например, в качестве генерального среднего используется выборочное среднее, в качестве генеральной дисперсии – выборочная дисперсия и т.д. Такие оценки и называются точечными. Их недостаток состоит в том, что не ясно, насколько сильно они отличаются от истинных значений параметров генеральной совокупности. Ошибка может быть особенно большой в случае малых выборок.

Интервальная оценка параметров генеральной совокупности – более достоверна. В этом случае определяется интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение исследуемого признака. Такой интервал называется *доверительным интервалом*, а вероятность того, что истинное значение оцениваемой величины находится внутриэтого интервала – *доверительнойвероятностью* или *надежностью*. В медицинской литературе для этой величины используется термин «вероятность безошибочного прогноза». Обозначим ее γ. Значения γ задаются заранее (обычно в медико-биологических исследованиях выбирают значения $\gamma = 0{,}95 = 95\%$ или $\gamma = 0{,}99 = 99\%$), после чего находят соответствующий доверительный интервал.

Для построения надежных интервальных оценок необходимо знать закон, по которому оцениваемый случайный признак распределен в генеральной совокупности.

Рассмотрим, вначале для малых выборок ($n< 30$), как строится интервальная оценка генеральной средней $\bar{x}_г = M_г(X)$ признака, который в генеральной совокупности распределен по нормальному закону. В этом случае интервальной оценкой (с доверительной вероятностью γ) генеральной средней (математического ожидания) $\bar{x}_г = M_г(X)$ количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при неизвестном $\sigma_г$ является доверительный интервал

$$\bar{x}_в - \delta < M_г(X) < \bar{x}_в + \delta\,, \qquad (2)$$

или, в другой форме записи:

$$M_г(X) = \bar{x}_в \pm \delta, \qquad (3)$$

где $\delta = t_{\gamma,\,n}\cdot(S/\sqrt{n})$ – полуширина доверительного интервала (точность оценки); n – объем выборки; S –

выборочное среднее квадратическое отклонение; $S/\sqrt{n} = S_{\bar{x}_в}$ – стандартная ошибка выборочного среднего, $t_{\gamma,n}$ – коэффициент Стьюдента (его значения определяются либо по соответствующим таблицам, либо содержатся в программных статистических пакетах обработки данных).

Анализ формулы (34) показывает, что:

а) чем больше доверительная вероятность γ, тем больше коэффициент $t_{\gamma,n}$ и шире доверительный интервал;

б) чем больше объем выборки n, тем уже доверительный интервал.

При большой выборке ($n > 30$) полуширину доверительного интервала δ определяют по соотношениям:

$\delta = 1{,}96S/\sqrt{n}$ при $\gamma = 95\%$ или $\delta = 2{,}58S/\sqrt{n}$

при $\gamma = 99\%$.

Доверительный интервал существует и для $\sigma_г$.

Подобные интервальные оценки с заданной надежностью даются и в тех случаях, когда рассматриваемый случайный признак распределен в генеральной совокупности не по нормальному, а по другим законам.

Пример 1. Исследуется состояние дыхательных путей курящих. В качестве характеристики используется показатель функции внешнего дыхания – максимальная объемная скорость середины выдоха. Предполагая, что в генеральной совокупности данный параметр распределен по нормальному закону, найдите 95%-ный и 99%-ный доверительные интервалы для $\bar{x}_г$ (т.е. $M_г$ (X)), характеризующие этих людей. Обследуемая группа – 20 курящих, $\overline{x}_в$=2,2 л/с, S = 0,73 л/с.

Решение:

1. Для γ = 95% и n = 20 находим по таблицам коэффициент Стьюдента $t_{0,95;20}$ = 2,09 и полуширину доверительного интервала δ:

$$\delta = t_{\gamma,\,n} \cdot (S/\sqrt{n}) = 2{,}09 \cdot \frac{0{,}73}{\sqrt{20}} = 0{,}342.$$

Теперь можем записать доверительный интервал для $M_г(X)$:

(2,2 – 0,342) л/с < $M_г(X)$ < (2,2 + 0,342) л/с,

т.е. 1,858 л/с < $M_г(X)$ < *2,542 л/с.*

В более компактной эквивалентной форме записи:

$$M_г(X) = (2{,}2 \pm 0{,}342) \text{ л/с}.$$

2. Для γ = 99% и n= 20 $t_{0,99;20}$ = 2,86; тогда $M_г(X) = \overline{x}_г$ определяется неравенством:

$$(2{,}2 - 0{,}467) \text{ л/с} < M_г(X) < (2{,}2 + 0{,}467) \text{ л/с}$$

или

$$1{,}733 \text{ л/с} < M_г(X) < 2{,}667 \text{ л/с},$$

иначе

$$M_г(X) = (2{,}2 \pm 0{,}467) \text{ л/с}.$$

Полученные данные подтверждают ранее сделанный вывод: увеличение доверительной вероятности γ «раздвигает» границы доверительного интервала.

Поставим обратную, практически значимую задачу. По заданной точности оценки δ, т. е. по заданной полуширине доверительного интервала, определим необходимый объем выборки, обеспечивающий нужное δ. Эта задача решается особенно просто в случае больших выборок (n> 30). Здесь, например, при доверительной вероятности 95 % δ = =1,96 $\cdot S/\sqrt{n}$ и, следовательно, необходимый объем выборки равен:

$$n \geq \frac{(1{,}96)^2 \cdot S^2}{\delta^2}$$

Пример 2. Исследователь хочет установить средний уровень гемоглобина для определенной группы населения. Учитывая предварительные данные, он полагает, что этот уровень составляет примерно 150 г/л со стандартным отклонением 32 г/л. Определите, сколько человек он должен обследовать (с какой выборкой он должен работать) при δ= 5 г/л. и доверительной вероятности 0,95 = 95 %.

Решение.

$$n = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 32^2}{5^2} = 157{,}4.$$

Таким образом, необходимо обследовать не менее 157 человек.

§ 5. Понятие нормы для медицинских показателей

«Нормальные» значения медико-биологических показателей являются своеобразным стандартом, характеризующим состояние здоровья человека.

Обычно используют два типа норм – *точечную норму* и *нормальный диапазон*, причем при их установлении работают с выборками достаточно большого объема. Точечную норму определяют по значению центра распределения. Нормальные диапазоны в большинстве случаев устанавливаются так, чтобы внутрь их границ гарантированно попадали 95 % случайно отобранных здоровых людей. Когда соответствующий показатель – случайная величина – распределен по нормальному закону, точечной нормой для него считается $\overline{x}_в = \overline{x}_г$, а нормальный диапазон определяется так: $\overline{x}_в \pm 1{,}96 S$ $= \overline{x}_г \pm 1{,}96\sigma_г$; иногда используют менее точное приближение, заменяя 1,96 на 2.

Очень часто нормальные значения некоторого показателя неодинаковы у лиц, живущих в разных географических регионах, у мужчин и женщин, в разных возрастных группах. Поэтому при установлении нормального значения необходимо указывать популяционные группы, к которым оно относится.

§ 6. Элементы теории ошибок (погрешностей)

Целью любого **измерения** некоторой физической величины является получение её истинного значения. Однако это весьма непростая задача из-за различных ошибок (погрешностей), неизбежно возникающих при измерениях.

Все измерения делятся на прямые и косвенные. *Прямые измерения* производятся с помощью приборов, которые непосредственно измеряют исследуемую величину. При *косвенных измерениях* определяемую величину вычисляют по некоторой формуле, а параметры, входящие в эту формулу, находят путем прямых измерений. Погрешность, возникающая в прямых измерениях, естественно, ведет к появлению ошибки косвенно определяемой величины.

Ошибки (погрешности) измерений принято делить на систематические и случайные.

Систематические ошибки вносятся самим измерительным прибором. Их можно учесть, если известен класс точности данного прибора.

Появление *случайных ошибок* обусловлено влиянием многочисленных случайных причин на результаты измерений. Эти погрешности обнаруживаются лишь при повторении процедуры измерений и приводят к получению ряда близких, но все-таки различающихся между собой значений измеряемой величины.

Теория ошибок позволяет оценить величину именно случайной ошибки. Обычно предполагают, что случайная ошибка подчиняется нормальному закону распределения.

Рассмотрим вначале **порядок обработки результатов прямых измерений**.

Допустим, измеряется величина Xи мы хотим найти её истинное значение – $x_{ист.}$ Результатом n измерений, проведенных соответствующим прибором, является ряд её значений: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Разность между полученным x_i и истинным $x_{ист}$ значениями представляет собой случайную абсолютную погрешность отдельного измерения $\Delta x_i = x_i - x_{ист}$. Причём из теории ошибок следует, что при большом числе измерений (большом n) ошибки одной и той же величины, но разного знака встречаются одинаково часто. Посмотрим, к чему это приводит. Представим полученные нами значения x_i через $x_{ист}$ и Δx_i и сложим получившиеся соотношения:

$x_1 = x_{ист.} + \Delta x_1;$

$x_2 = x_{ист.} + \Delta x_2;$

………………….

$x_n = x_{ист.} + \Delta x_n;$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n x_{ист.} + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \ .$$

Отсюда найдем истинное значение измеряемой величины:

$$x_{ист} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \ .$$

Поскольку при большом числе измерений n ошибки равные по величине, но разные по знаку встречаются одинаково часто, то сумма абсолютных ошибок $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ не растет с увеличением n, а лишь колеблется вблизи нуля, поэтому с увеличением nслагаемое $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ уменьшается и стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, при очень большом количестве измеренийистинное значение измеряемой величины практически совпадает со средним арифметическим всех полученных значений:

$$x_{ист} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} \ .$$

Однако при любом ограниченном количестве проведенных измерений n истинное значение $x_{ист}$ будет отличаться от найденного среднего арифметического значения – $x \neq x_{ист.}$ –, необходимо оценить величину этого различия.

К решению данного вопроса можно подойти следующим образом. В связи с влиянием случайных ошибок на результаты измерений некоторой физической величины X ряд полученных в эксперименте её значений $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ можно рассматривать как выборку из генеральной совокупности, которой соответствует $n \to \infty$ и математическое ожидание которой – $M_г(X) = \bar{x}_г = x_{ист.}$ – надо найти (предполагается, и теория ошибок это подтверждает, что результаты измерений в генеральной совокупности распределены по нормальному закону).

Полученной выборке, естественно, соответствует свое среднее арифметическое значение:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

Тогда с определенной доверительной вероятностью γ можно утверждать, что $x_{ист.}$ лежит в доверительном интервале, построенном около $\bar{x}$, а полуширина этого интервала при $n < 30$ рассчитывается по известной формуле:

$$\Delta x = t_{\gamma,\, n} \frac{S}{\sqrt{n}} \,. \qquad (1)$$

Следовательно,

$x_{ист.} = \bar{x} \pm \Delta x$, или

$$\bar{x} - \Delta x < x_{ист.} < \bar{x} + \Delta x. \qquad (2)$$

В теории ошибок величину

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (3)$$

называют средней квадратичной ошибкой прямо измеряемой величины x, величину Δx (см. (1)) – её абсолютной ошибкой, а величину $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\ \%$ – относительной ошибкой, оценивающей точность измерений.

При **косвенныхизмерениях** искомую величинуZ вычисляют по некоторой формуле

$Z = f(x, y)$,

где x и y – прямо измеряемые величины.

Число значений x и y, полученных при измерении каждого из них, равно n:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$;

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Теперь можно найти их средние арифметические значения:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (4)$$

и средние квадратичные ошибки:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}; \qquad S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}, \qquad (5)$$

Среднее арифметическое значение косвенно измеряемой величины вычисляют по формуле

$$\overline{Z} = f(\overline{x}, \overline{y}) \qquad (6)$$

Истинное значение Z – $Z_{ист.}$ лежит в доверительном интервале:

$\overline{Z} - \Delta Z < Z_{ист.} < \overline{Z} + \Delta Z$ или $Z_{ист.} = \overline{Z} \pm \Delta Z$.

Полуширина данного интервала для нормально распределенной величины Z рассчитывается по формуле:

$$\Delta Z = t_{\gamma, n} \frac{S_z}{\sqrt{n}} \qquad (7)$$

В (43) средняя квадратичная ошибка S_z косвенно измеряемой величины, равна:

$$S_z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 S_y^2} \qquad (8)$$

где $\frac{\partial Z}{\partial x} = Z_x'$ и $\frac{\partial Z}{\partial y} = Z_y'$ – частные производные величины $Z=f(x, y)$, соответственно, по x и по y, вычисляемые при их средних значениях, S_x и S_y – средние квадртичные ошибки величин x и y, значения которых получаются по формулам (4).

Окончательный результат обычно записывается в виде: $Z_{ист.} = \overline{Z} \pm \Delta Z$, с указанием выбранного значения γ. Приводится так же относительная ошибка косвенно измеряемой величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Z}{\overline{Z}} \cdot 100\ \%.$$

Пример 1. Рассчитаем случайную ошибку при косвенном измерении вязкости жидкости:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho . t}{\rho_0 t_0},$$

где η, ρ, t– вязкость, плотность и время истечения исследуемой жидкости из капилляра вискозиметра; η_0, ρ_0, t_0– соответственно вязкость, плотность и время истечения эталонной жидкости (воды).

Величины η_0, ρ_0 и ρсчитаем точно известными, t и t_0 измеряем секундомером, вязкость исследуемой жидкости – косвенно измеряемая величина.

1. Пять измерений времени истечения исследуемой жидкости и воды дали следующие результаты:

для исследуемой жидкости t= 79, 2с;80,4с;78,0с; 83,6с; 80,2 с;

для воды t_0 = 51,0с; 48,4с; 50,6с; 47,4с; 44,2с.

2. Найдем по (3) средние арифметические значения t и t_0:

$$\bar{t} = \frac{\text{[illegible]}}{5} = 80{,}28 \text{ с},$$

$$\bar{t}_0 = \frac{\text{[illegible]}}{5} = 48{,}32 \text{ с}.$$

Определим по (5) среднее арифметическое значение вязкости исследуемой жидкости при: $\rho = 790\ \frac{\text{кг}}{м^3}$, $\rho_0 = 998{,}2\ \frac{\text{кг}}{м^3}$, $\eta_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ Па·с:

$$\bar{\eta} = \eta_0 \frac{\rho \bar{t}}{\rho_0 \bar{t}_0}; \quad \bar{\eta} = 1{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = 1{,}31 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с} = 1{,}31 \text{ мПа}\cdot\text{с}.$$

3.Рассчитаем среднюю квадратичную ошибку вязкости:

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 S_t^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t_0}\right)^2 S_{t_0}^2}.$$

Определим средние квадратичные ошибки времени истечения исследуемой жидкости S_t и воды S_{t_0}:

$S_t =$

$$\sqrt{\frac{(80,28-79,2)^2 + (80,28-80,4)^2 + (80,28-78,0)^2 + (80,28-83,6)^2 + (80,28 \ldots}{5-1}}$$

$=2,09$ с

$S_{t_0} =$

$$\sqrt{\frac{(48,32-51,0)^2 + (48,32-48,4)^2 + (48,32-50,6)^2 + (48,32-47,4)^2 + (48,32-44,2)^2}{5-1}}$$

$= 2,75$ с.

Найдем частные производные η при $t = \bar{t}$ и $t_0 = \bar{t}_0$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\eta_0\rho}{\rho_0 t_0} = \frac{1,01\cdot10^{-3}\cdot 79\ldots}{998,2\cdot48,32} = 16,38\cdot10^{-6}\ \text{Па},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t_0} = -\frac{\eta_0\rho t}{\rho_0 t_0^2} = -\frac{1,01\cdot10^{-3}\cdot79\ldots\cdot80,28}{998,2\cdot48,32^2} =$$

$= -27,21\cdot10^{-6}$ Па.

Тогда

$S_\eta = \sqrt{(16,38\ldots)^2\cdot2,09^2 + (-27,21\ldots)^2\cdot2,75^2} =$

$= 82,2\cdot10^{-6}$ Па ·с.

4. Определим полуширину доверительного интервала или абсолютную ошибку вязкости $\Delta\eta$ по (7). Для этого, приняв доверительную вероятность $\gamma = 0,95$, и, зная число измерений непосредственно определяемых величин ($n = 5$),

найдем коэффициент Стьюдента, [см. табл., напр. в (4, 9)], $t_{\gamma,\,n}$ = 2,78, тогда:

$$\Delta\eta = 2,78 \cdot \frac{82,2\cdot 10^{6}}{\sqrt{5}} = 0,1\cdot 10^{-3}\ \text{Па}\cdot\text{с} = 0,1\ \text{мПа}\cdot\text{с}$$

Следовательно, с доверительной вероятностью γ = 0,95 = 95% истинное значение вязкости исследуемой жидкости лежит в интервале

$\eta = \overline{\eta} \pm \Delta\eta = (1,31 \pm 0,1)\cdot 10^{-3}$ Па · с = (1,31 $\pm$ 0,1) мПа ·с.

Относительная ошибка равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta\eta}{\eta}\cdot 100\,\% = \frac{0,1\cdot 10^{-3}}{1,31\cdot 10^{-3}}\cdot 100\,\% \approx 7,6\,\%.$$