Лекция 2.

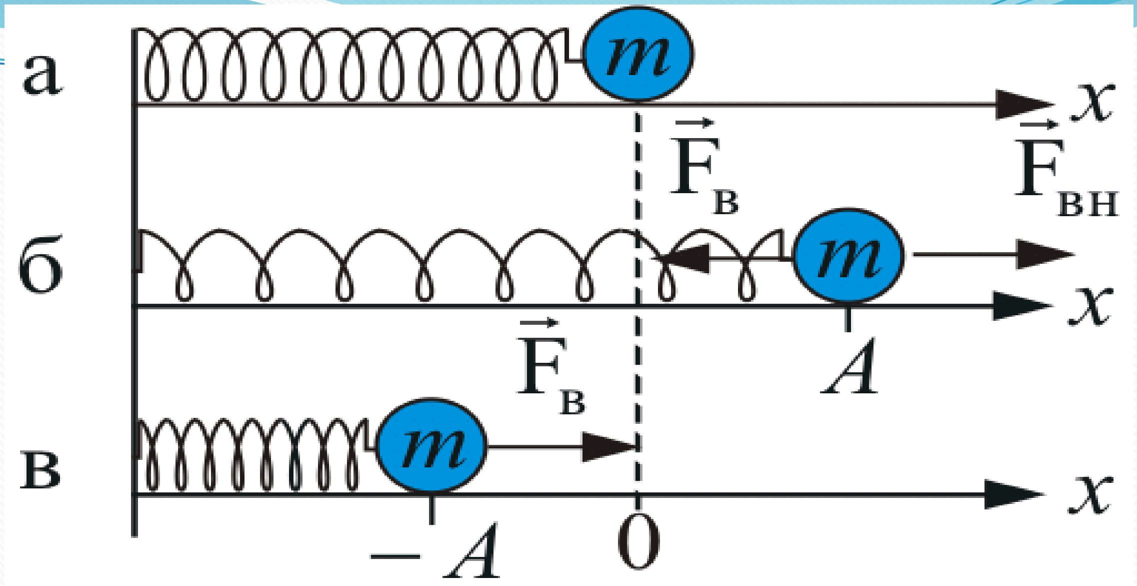
Тема 1. Механические колебания. Дифференциальные уравнения колебательного движения

1.1. Виды и признаки колебаний

В физике особенно выделяют колебания двух видов – механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека.

Опр. Колебательное движение (или просто колебание) – это движение, повторяющееся в течении времени и величины, описывающие его меняются на противоположные.

Пример. Колебания пружинного маятника



Закон Гука

$F_в = – kx$

x = 0 – положение равновесия;

$F_{вн}$ – внешняя растягивающая сила;

$F_в$ – возвращающая сила;

A – амплитуда колебаний.

k - жесткостью пружины.

Знак минус означает, что возвращающая сила, всегда противоположна направлению перемещения x

Из приведенного примера следуют *три признака колебательного движения:*

•***повторяемость*** (***периодичность***) *– движение по одной и той же траектории туда и обратно;*

•***ограниченность*** *пределами крайних положений;*

•***действие силы****, описываемой функцией* $F = -kx$.

Опр. Периодические колебания – колебания, при которых наблюдается изменение значения физических величин, изменяющихся через равные промежутки времени.

$$\boxed{f(t) = f(t + nT)}$$

- Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые ***гармонические колебания.***
- Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, ***F = – kx***), совершает ***гармонические колебания.***
- Саму такую систему часто называют ***гармоническим осциллятором***.

Рассмотрение гармонических колебаний важно по **двум причинам:**

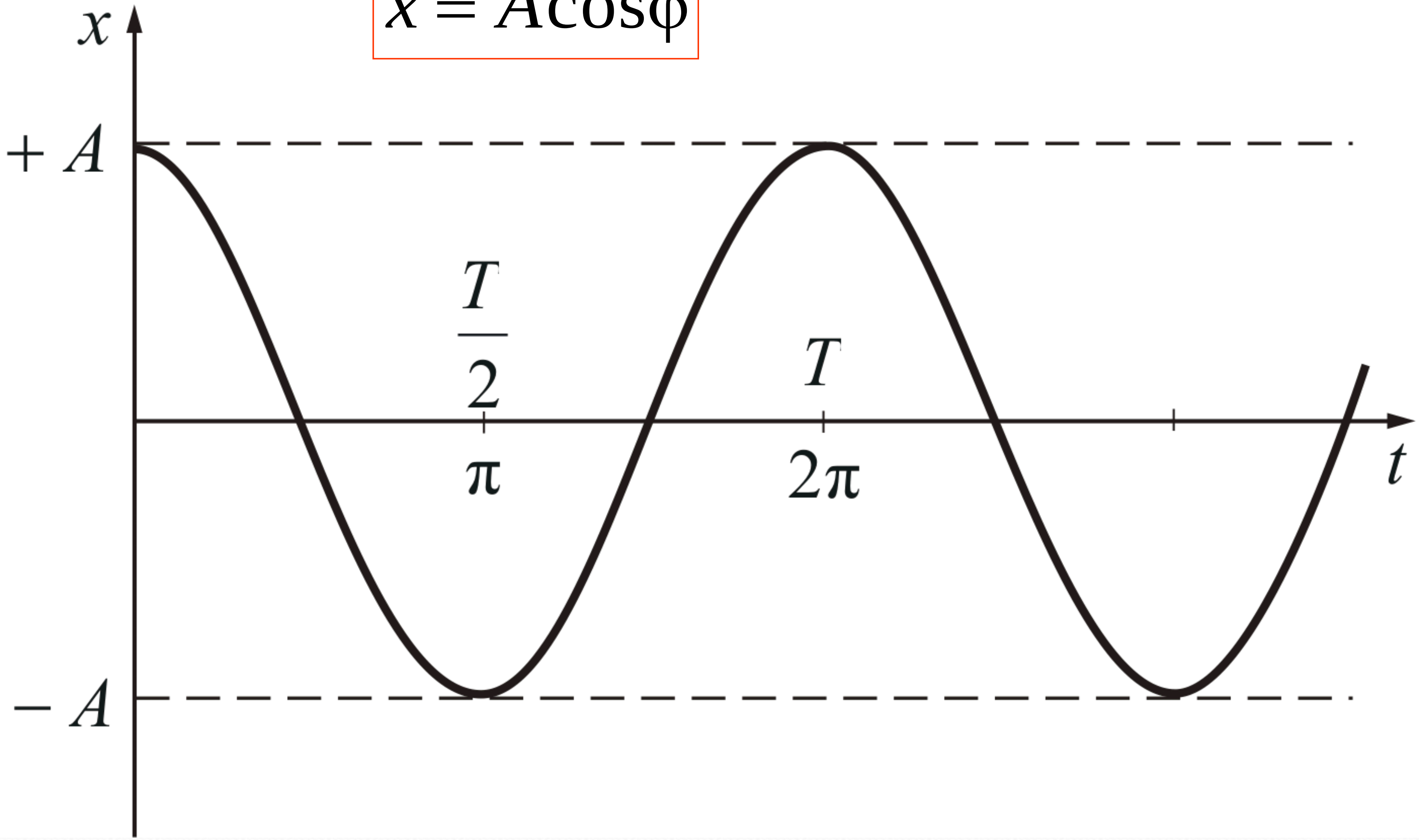
- колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, ***близкий к гармоническому***;
- различные ***периодические процессы*** (повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как ***наложение гармонических колебаний***.

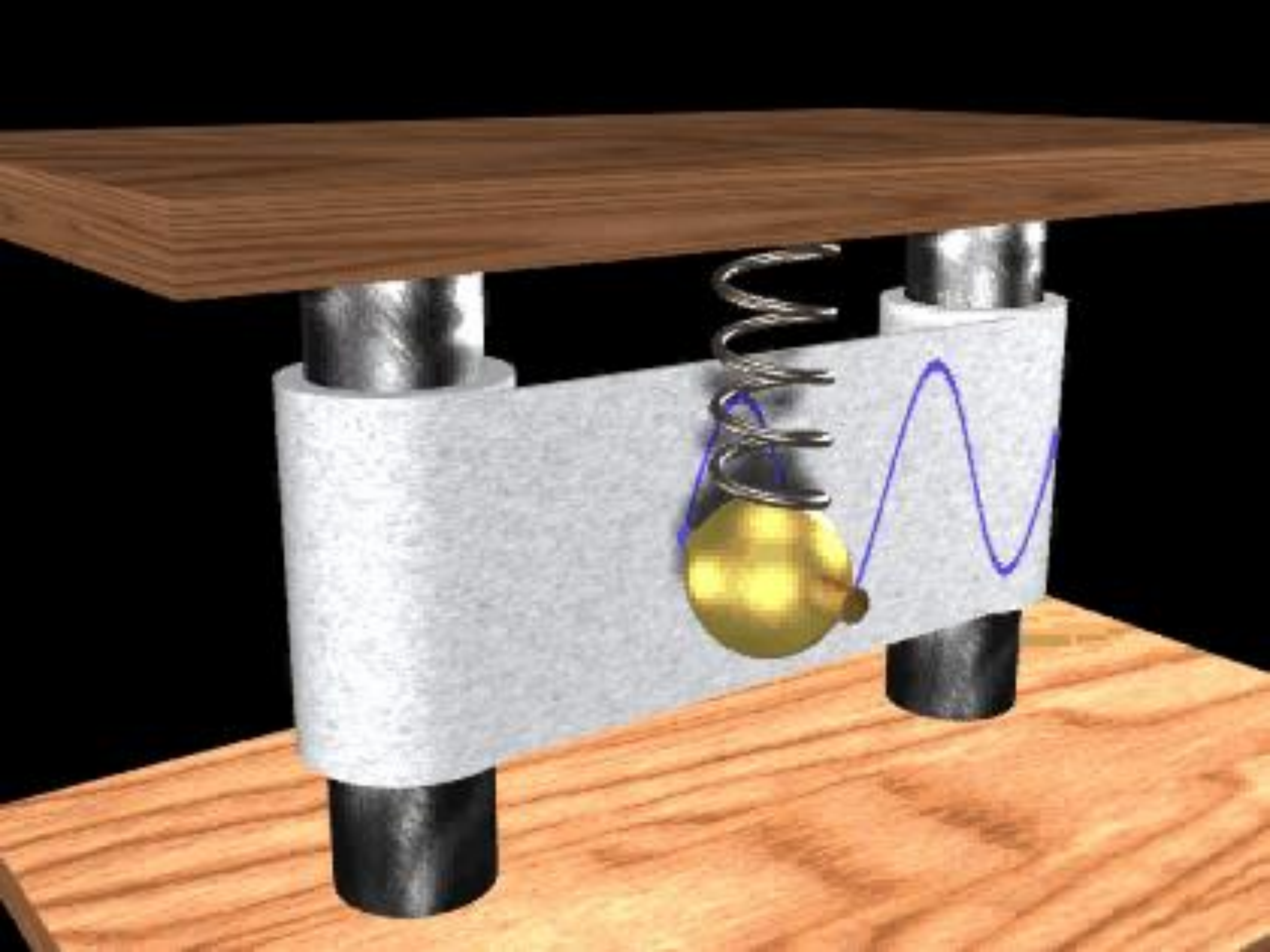
Опр. Гармонические колебания – колебания, описываемые законами синуса или косинуса называются

$$\boxed{x = A\cos\varphi} \quad \text{или} \quad \boxed{x = A\sin\varphi}$$

Здесь синус или косинус используются в зависимости от условия задачи, *A* и φ – параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.

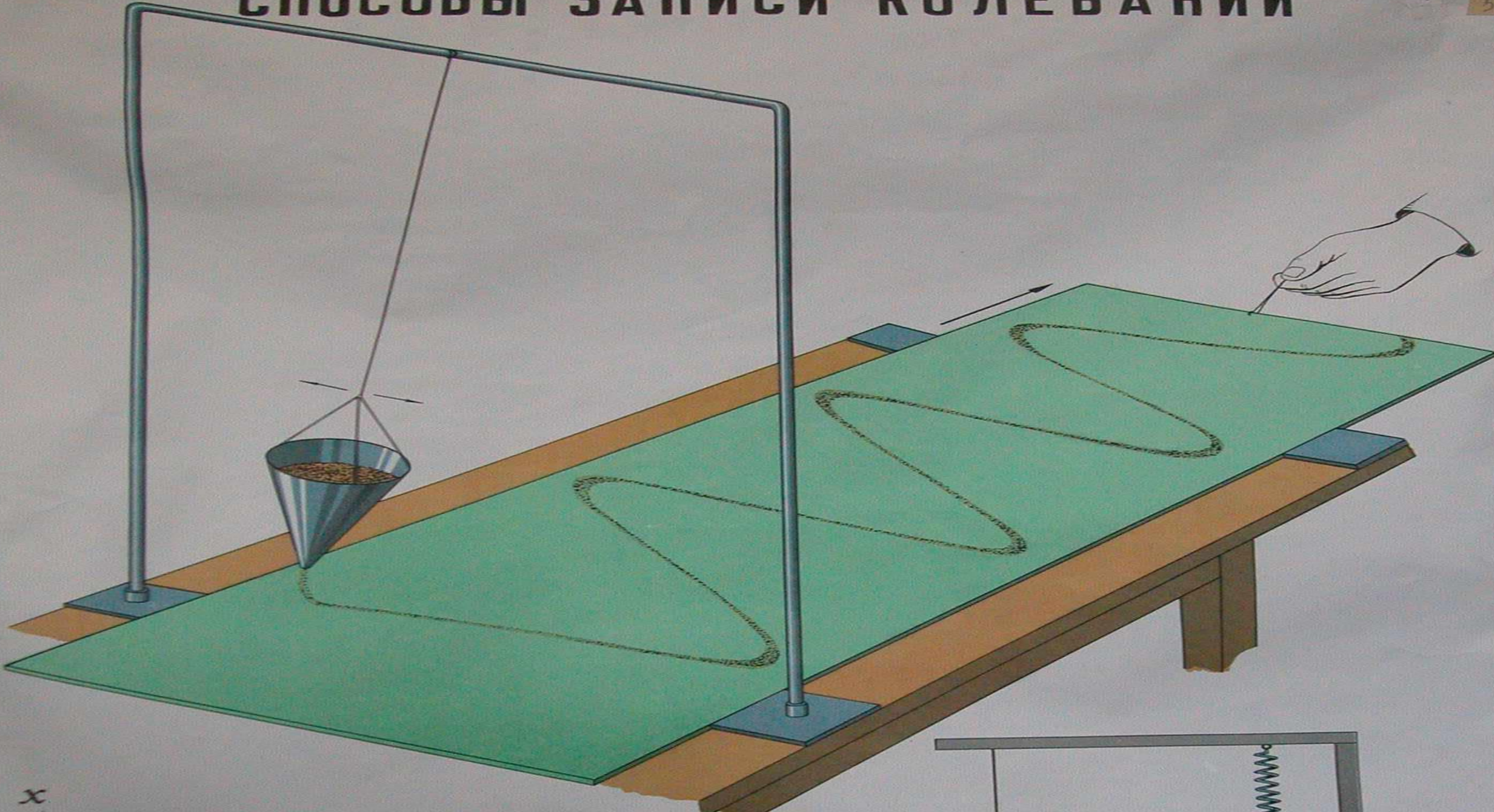
$$x = A\cos\varphi$$

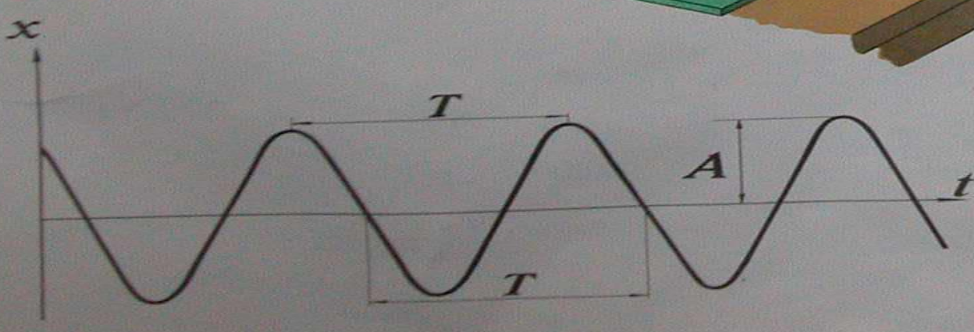




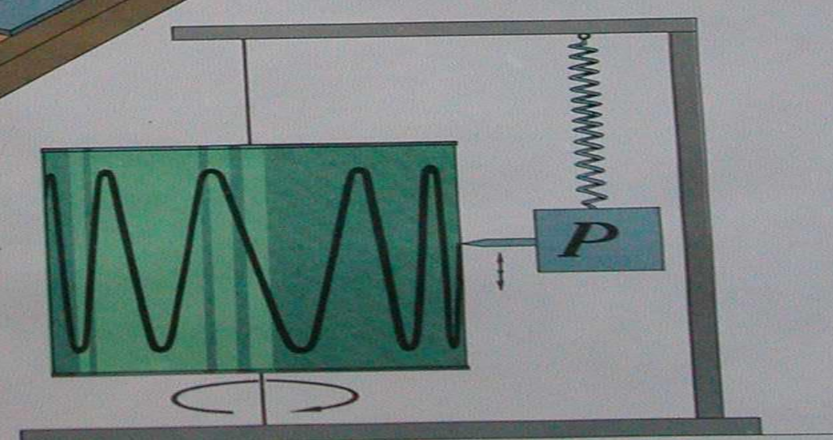
СПОСОБЫ ЗАПИСИ КОЛЕБАНИЙ

ЛИСТ 1





$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



1.2. Параметры гармонических колебаний

Опр. Смещение - расстояние колеблющегося тела от положения равновесия до точки, в которой находится груз в данный момент времени (***x***).

Опр. Амплитуда - максимальное смещение – наибольшее расстояние от положения равновесия (***A***).

Опр. Частота колебаний ***ν*** определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, измеряют в герцах (Гц) или c^{-1}:
1 Гц = 1 колебание в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Опр. Период колебаний – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$$

Опр. **Циклическая (круговая) частота** – число полных колебаний за 2π секунд (ω_0).

$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды.

Смещение описывается уравнением

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

тогда, по определению:

скорость $$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ускорение $$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

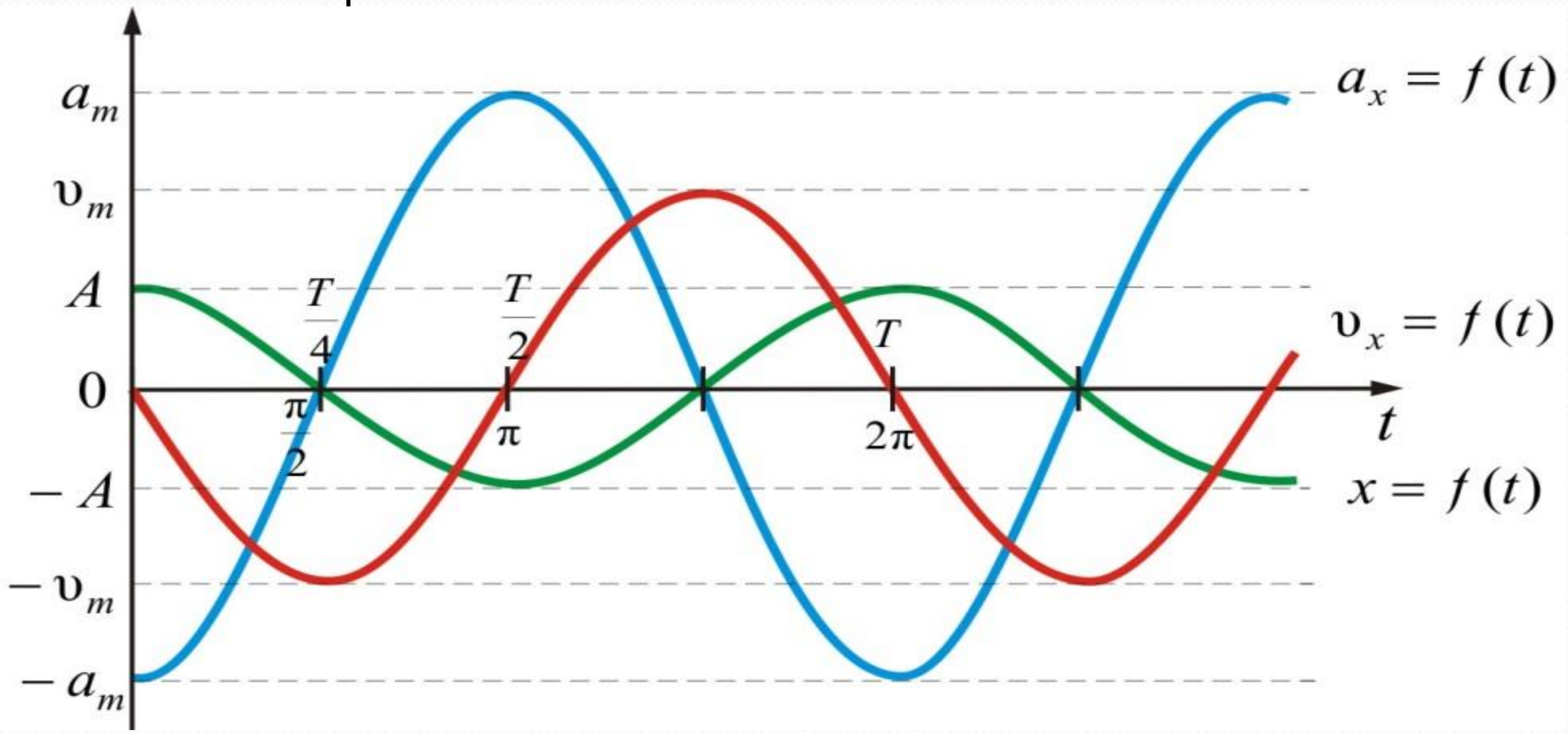
$\omega_0 A = \upsilon_m$ *– амплитуда скорости*;

$\omega_0^2 A = a_m$ *– амплитуда ускорения*.

1.3. Графики смещения, скорости и ускорения

Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$



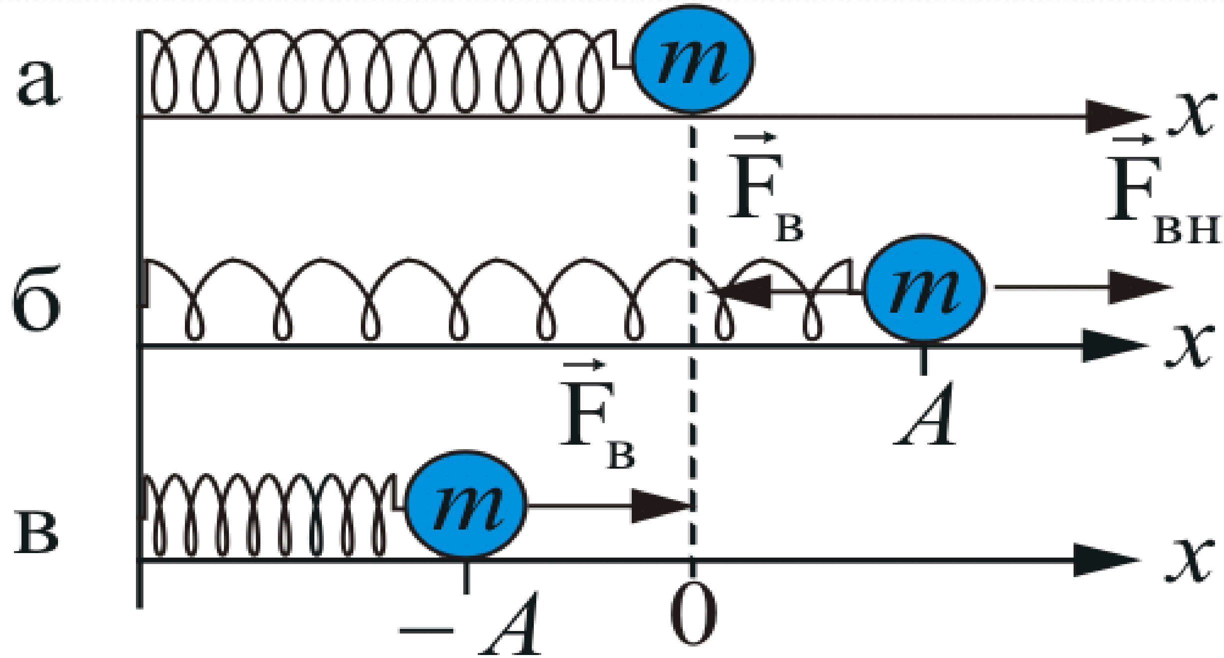
Выводы;

- **скорость колебаний тела максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия ($x = 0$).**

- **При максимальном смещении ($x = \pm A$) скорость равна нулю.**

- **Ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.**

1.4. Энергия гармонических колебаний



Потенциальная энергия тела U, *измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила*

$$F_x = -kx$$

•Потенциальная энергия

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

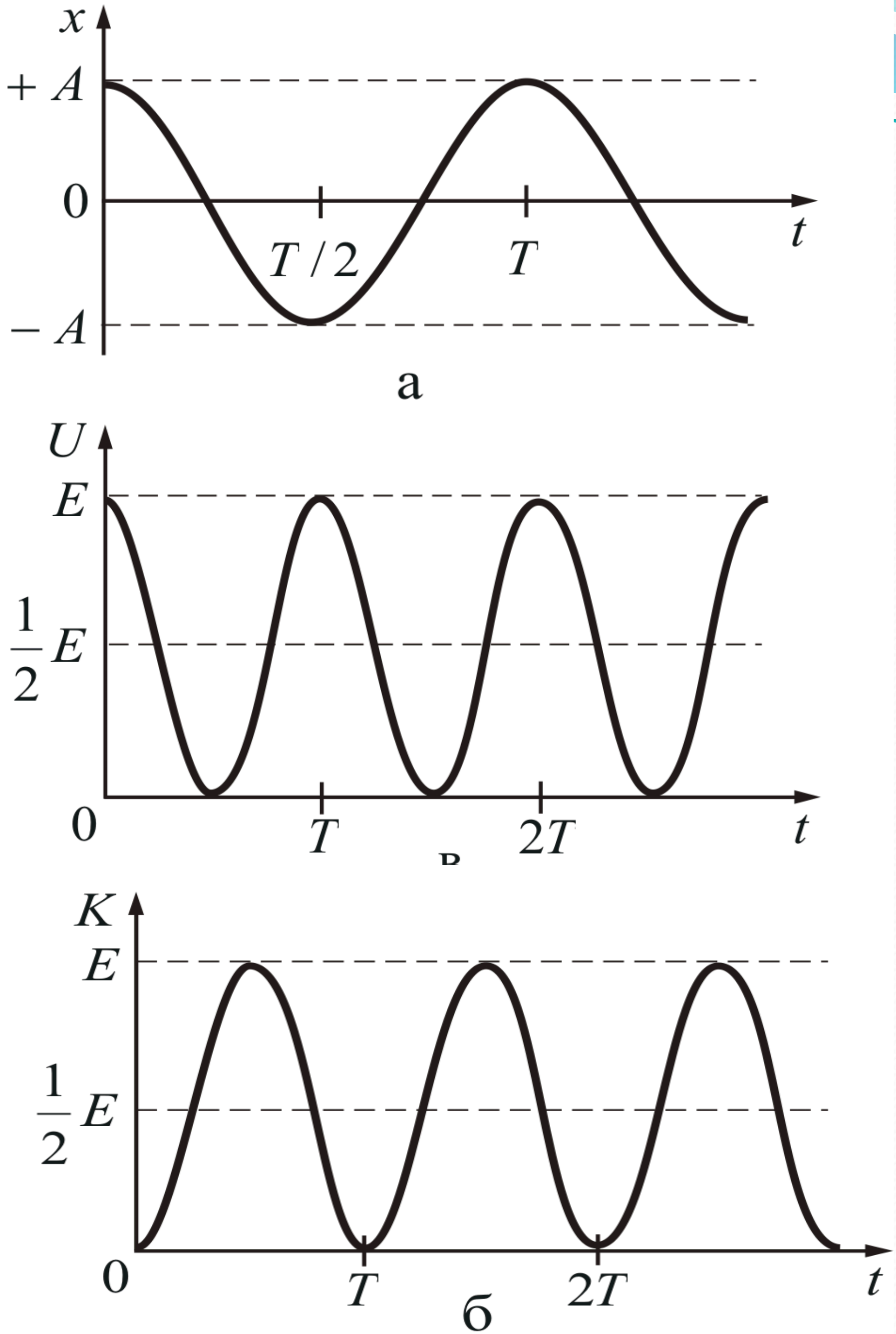
•Кинетическая энергия

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

• ***Полная энергия:***

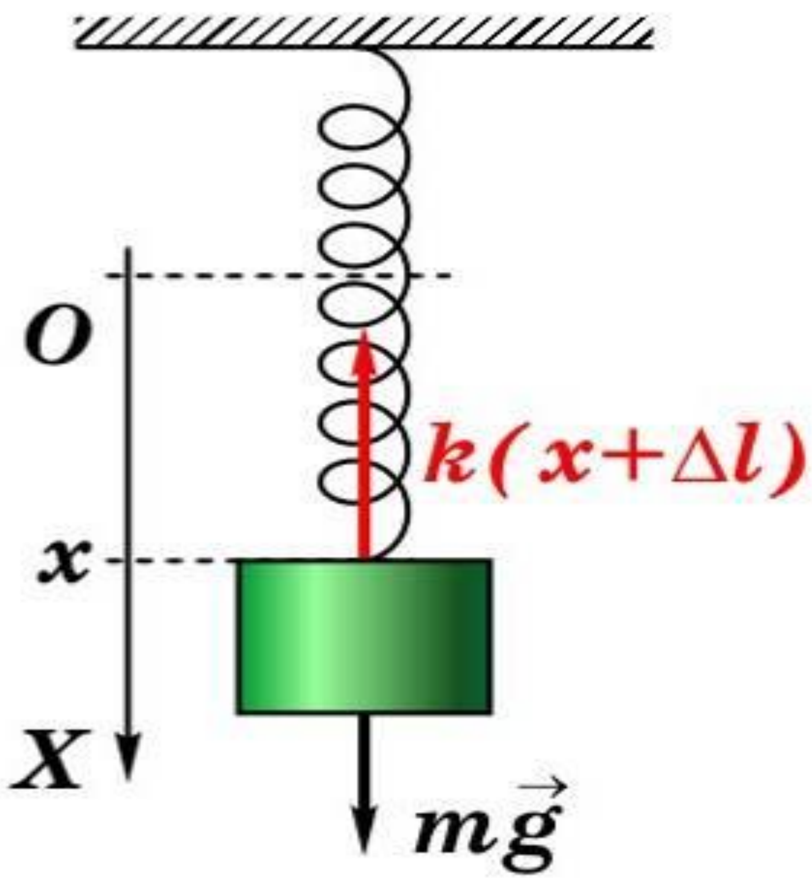
$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.



При колебаниях совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их ***сумма в любой момент времени постоянна.***

1.5. Гармонический осциллятор



1. ***Пружинный маятник*** – это груз массой *m*, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью *k*, совершающий гармонические колебания под действием *упругой силы*

$$F = -kx$$

Из второго закона Ньютона $F = ma$; или $F = -kx$ получим ***уравнение движения маятника***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

Решение этого уравнения – гармонические колебания вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Собственная циклическая частота гармонических незатухающих свободных колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

Период гармонических незатухающих свободных колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Вывод:

свободные незатухающие колебания описываются дифференциальным уравнением:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение данного уравнения – уравнение колебательного движения:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

1.6. Свободные затухающие механические колебания

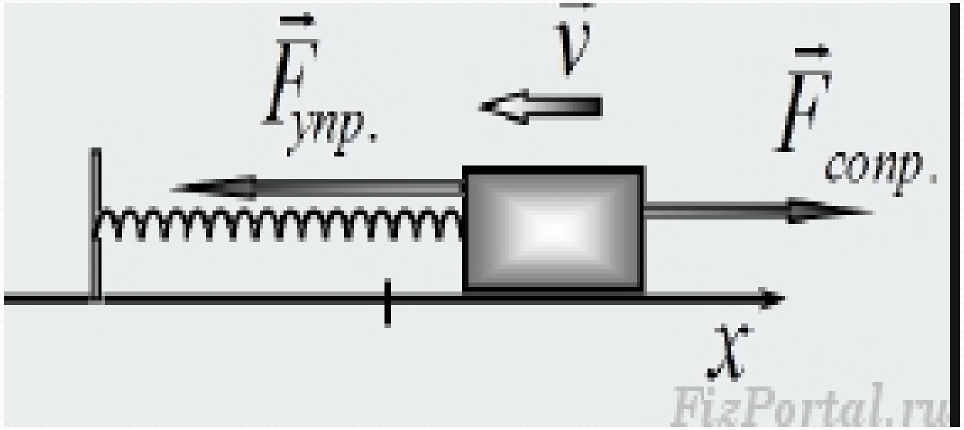
Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или *сопротивления*)

$$\boxed{\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{\upsilon}}$$

где *r* – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения



Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси *x*:

$$\boxed{ma_x = -F_x - F_{тр.x}}$$

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x}$$

где kx – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\dfrac{r}{2m} = \beta$; $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$

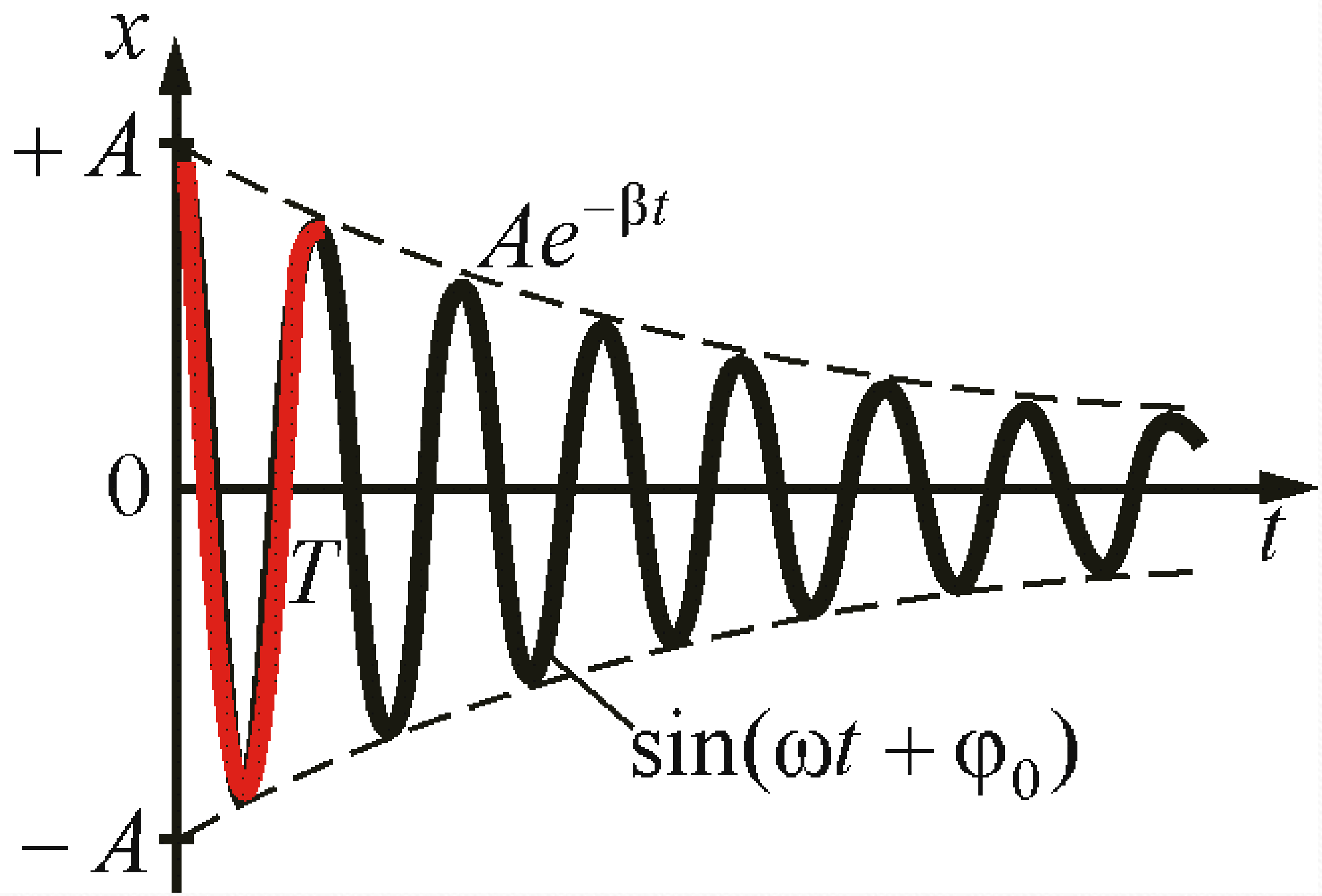
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение уравнения имеет вид $$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)}$$

Частоту затухающих колебаний ω.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad \beta \le \omega_0$$

Период затухающих колебаний $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$$



$$\chi = \beta T$$

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

$\omega = \omega_0 \qquad A \to \infty$ **- явление резонанса**

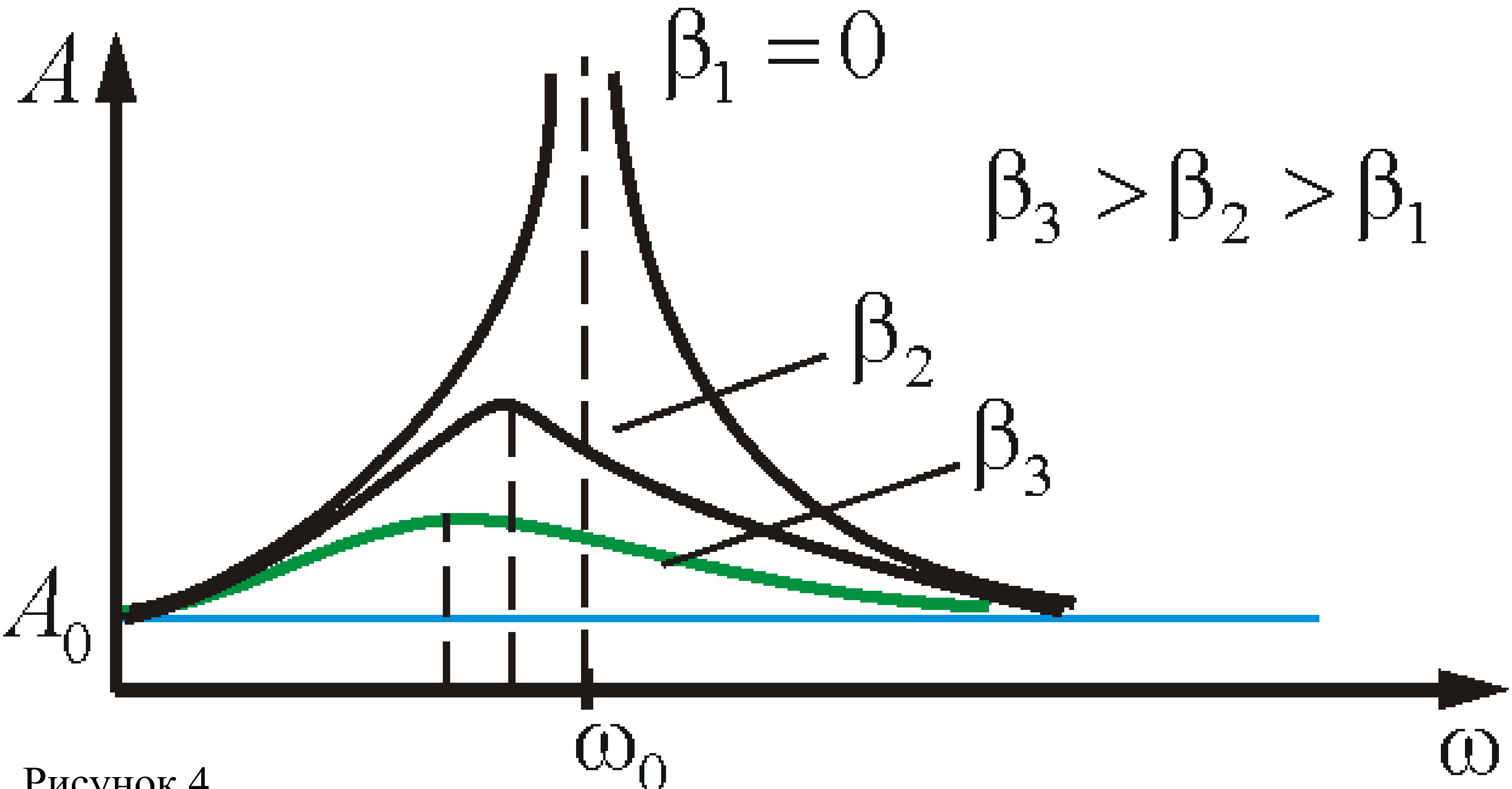


Рисунок 4

$\boxed{\omega_{ðåç} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$ – резонансная частота

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$ – резонансная частота.

Опр. Резонанс – физическое явление, при котором наблюдается возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний

Тема 2. Элементы гидромеханики жидкости: уравнение неразрывности, формула Ж.Л. Пуазеля, уравнение Д.Бернулли

Опр. Градиентом физической величины называют - вектор, показывающий направление наибольшего возрастания скалярной функции, значение которой изменяется от одной точки пространства к другой.

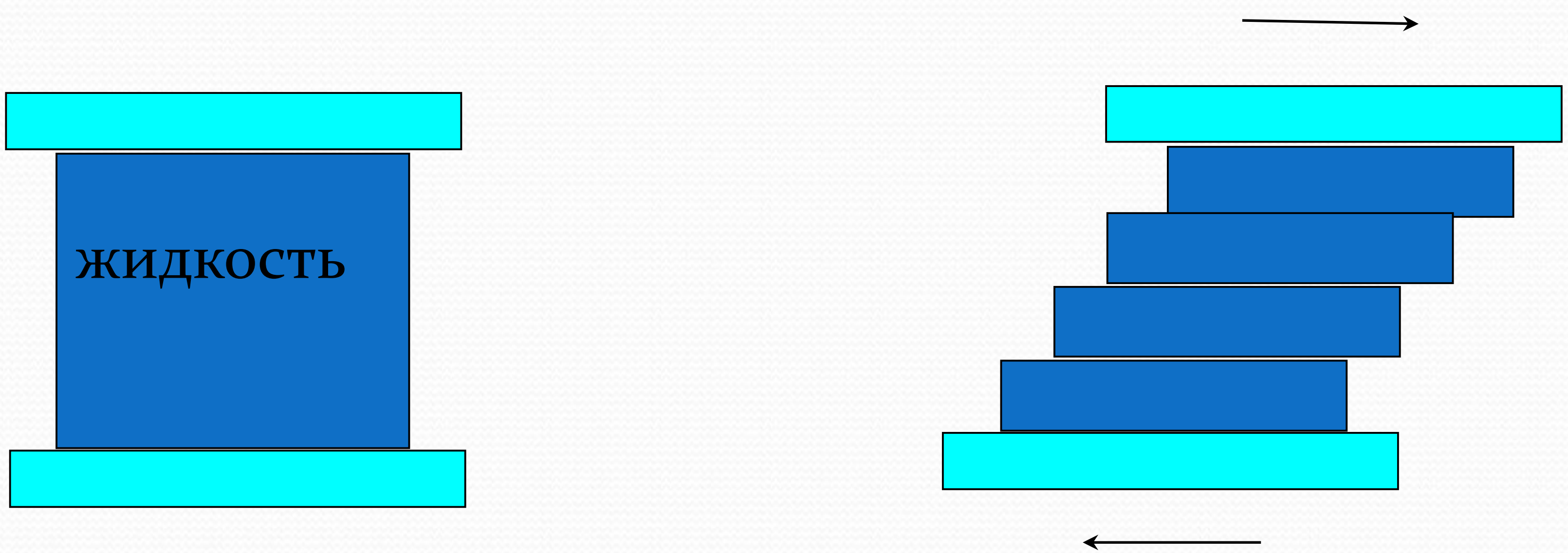
Опр. Градиентом физической величины называют скорость изменения этой величины в пространстве

$$grad\, Y = \frac{dY}{dx}$$

где *Y*- любая физическая величина, *dY* – изменение физической величины, *x* –пространственная координата, *dx*- изменение координаты, вдоль которой наблюдается изменение физической величины, *gradY* – условное обозначение градиента

2.1.Свойства и характеристики жидкостей

1. В случае жидкостей в деформации принимают участие множество слоев, которые перемещаются один над другим. Смещение продолжается пока присутствует внешняя сила.



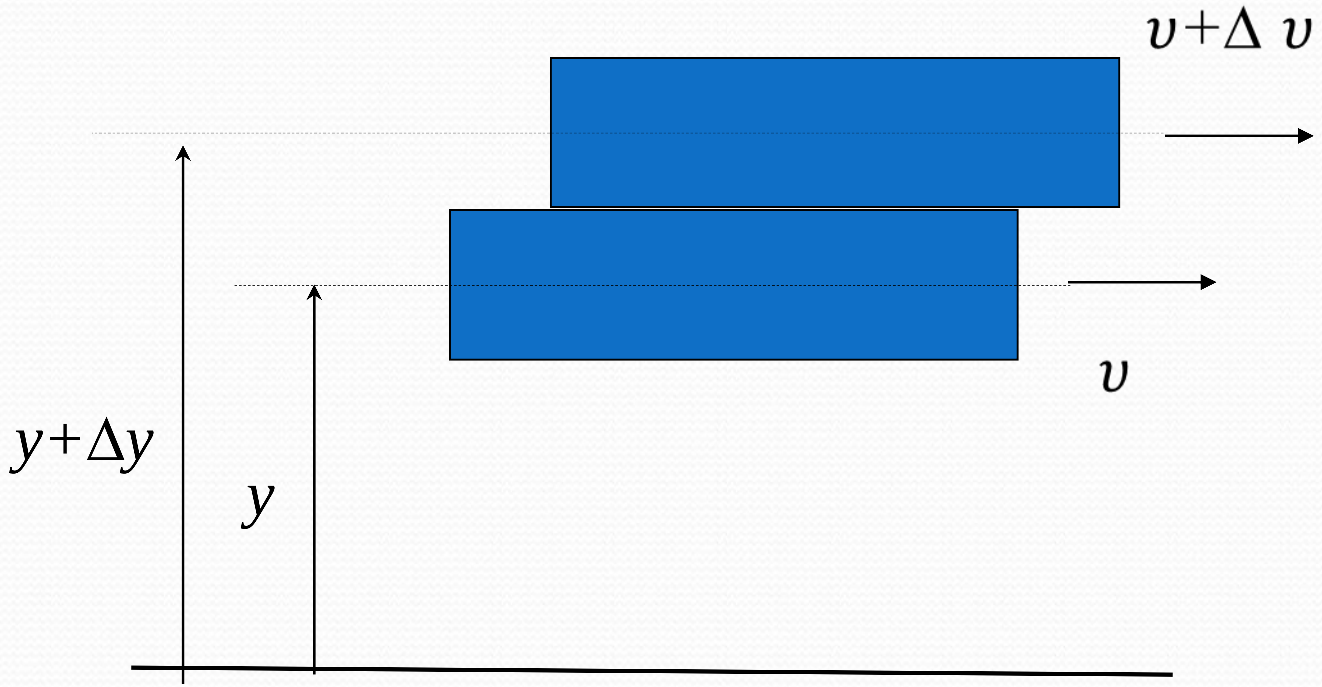
2. Жидкости проявляют сопротивление движению из-за своей вязкости, или, как ее еще называют, «внутреннего трения».

Опр. Внутреннее трение (вязкость) – трение слоев жидкости или газа, возникающее в следствии взаимодействия молекул, находящихся в соседних слоях жидкости, движущихся с разными скоростями относительно друг друга.

3. Слой жидкости, непосредственной прилегающий к неподвижной поверхности, имеет нулевую скорость. Это связано с тем, что молекулы жидкости взаимодействуют с молекулами твердого тела намного сильнее, чем друг с другом.

Рассмотрим два прилегающих друг к другу слоя жидкости, находящихся на высоте y и $y+\Delta y$, и имеющих скорости υ и $\upsilon + \Delta\, \upsilon$.

Тогда можно говорить о градиенте скорости вдоль заданного направления, т.е. $\text{grad}\, \upsilon = -\dfrac{d\upsilon}{dy}$



Ньютон предположил, что сдвигающая сила (между слоями) пропорциональна градиенту скорости, перпендикулярному к слоям, и площади соприкосновения смежных слоев жидкости:

$$F_{\text{тр.}} \sim \ \mathrm{grad}\ \upsilon \sim \frac{d\upsilon}{dy} \qquad\qquad F_{\text{тр.}} = -\eta \frac{d\upsilon}{dy} S$$

Опр. Вязкость жидкости или динамическая вязкость (η) – ф.в., численно равная силе вязкого трения, возникающей при движении жидкости или газа через единичную площадку, при градиенте скорости равном единице

Единицы измерения динамической и статической вязкости

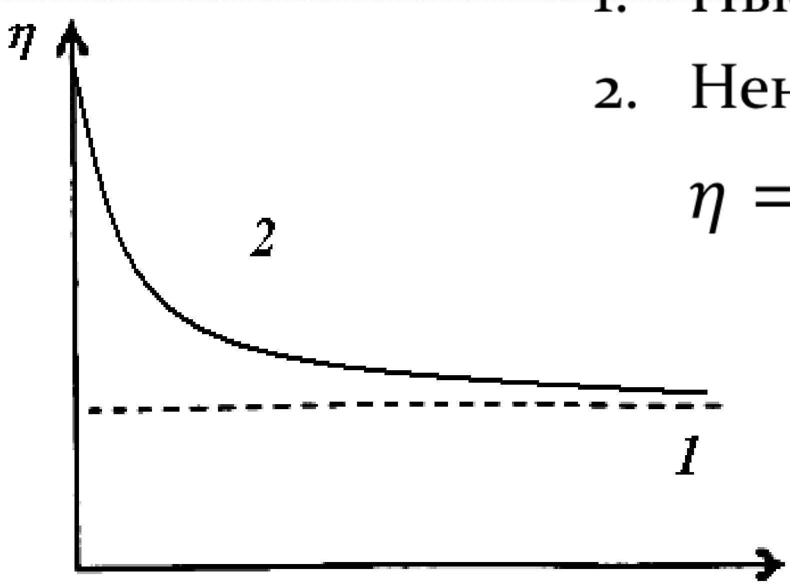
$$[\eta] = \left[\frac{F}{\frac{dv}{dy}S}\right] = \left[\frac{H}{\frac{м/с}{м}\cdot м^2}\right] = \left[\frac{H}{м^2}\cdot с\right] = \left[\frac{кг}{м \cdot с}\right] = [Па \cdot с]$$

4. Коэффициент вязкости зависит от физических свойств и строения жидкости. Большинство жидкостей подчиняются уравнению Ньютона (так называемые «ньютоновские жидкости»).

Опр. Ньютоновские жидкости - жидкости, у которых значение вязкости не зависит от градиента скорости (следовательно и от величины $\boldsymbol{\eta}$)

1. Ньютоновские жидкости η=*const*
2. Неньютоноские жидкости

$$\eta = f\left(\frac{dv}{dx}\right)$$



$$\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

Определение вязкости биологических жидкостей и, особенно, вязкости крови имеет существенное диагностическое значение. Разнообразные приборы, применяемые для этой цели называют ***вискозиметрами***.

Существуют следующие методы определения вязкости жидкости:

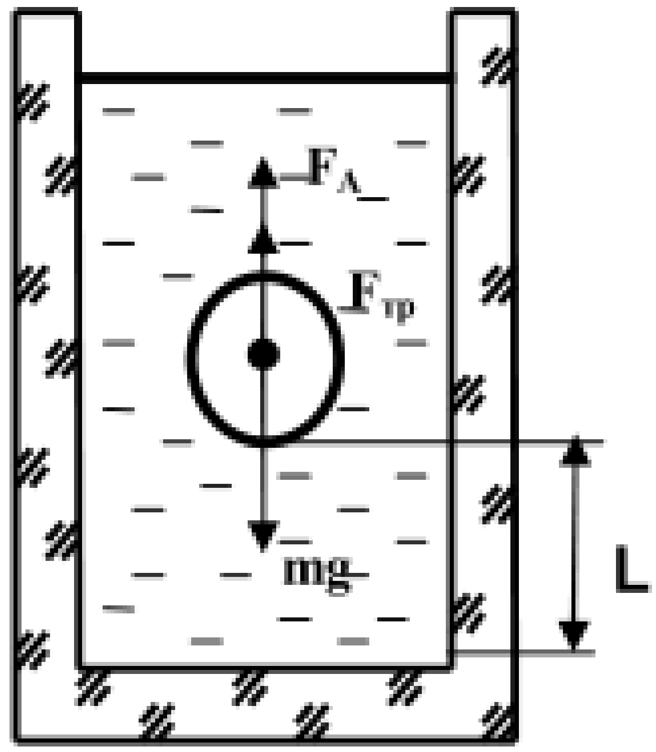
а) Метод Дж.Стокса (метод падающего шарика).

б) Капиллярные методы

в) Ротационные методы

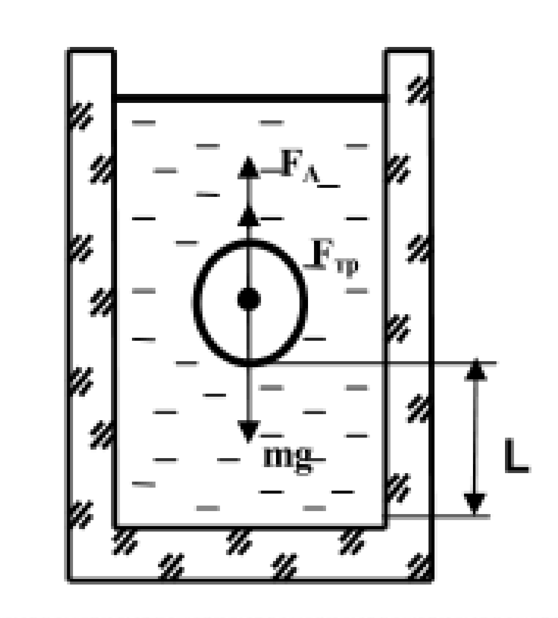
а) Метод Дж. Стокса (метод падающего шарика)

Представим цилиндр, заполненный жидкостью плотностью $\rho_ж$, вязкость которой η подлежит определению



Если в этой жидкости падает шарик радиусом r, массой m и плотностью ρ, то движение шарика определяется действующими на него тремя силами:

- силой тяжести $F_T = mg$
- силой Архимеда $F_A = \dfrac{4\pi r^3 \rho_{ж} g}{3}$
- силой трения F_{TP}



Согласно ***закону Дж.Стокса***, сила сопротивления движению шарика F_{TP} пропорциональна его радиусу, скорости движения и вязкости жидкости:

$$F_{TP} = 6\pi\eta r v$$

Сила трения уменьшает скорость движения шарика и через некоторое время после погружения шарика в жидкость его движение может стать равномерным.

При достижении равномерного движения сила тяжести становится равной сумме силы трения и силы Архимеда:

$$\frac{4\pi r^3 \rho g}{3} = \frac{4\pi r^3 \rho_{ж} g}{3} + 6\pi \eta r \upsilon$$

Отсюда определим искомую вязкость:

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_{ж}) r^2 g}{9\upsilon}$$

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_{ж})r^2 g}{9\upsilon}$$

Скорость движения шарика ***v*** определяется экспериментально. Для этого измеряется время t, за которое шарик равномерно проходит в жидкости расстояние L :

$$\upsilon = \frac{L}{t}$$

Метод Дж. Стокса обладает хорошей точностью, однако, для определения вязкости крови он практически не применяется потому, что:

- требует значительного количества исследуемой крови.
- в жидкостях, обладающих не очень большой вязкостью, сложно удовлетворить требованию равномерности движения шарика.

Опр. Неньютоновские жидкости - жидкости, у которых значение вязкости зависит от градиента скорости (следовательно и от величины $\boldsymbol{\eta}$), зависимость можно не только наблюдать, но и определить количественно.

Таким образом, данные ротационной вискозиметрии позволяют судить об изменении вязкости движущейся крови при различных скоростях сдвига.

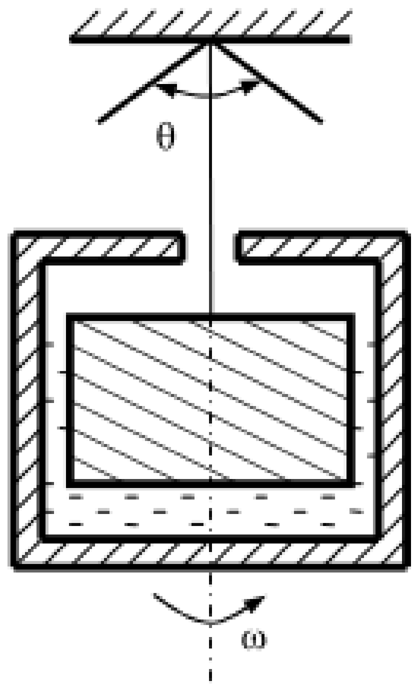
б) Ротационные методы

Достоинством этих методов является возможность определять не только значение вязкости, но и ее зависимость от скорости сдвига:

$$\eta = f\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)$$

Существуют разнообразные ротационные вискозиметры.

Рассмотрим принцип устройства одного из них. Представим два цилиндра, имеющих общую ось вращения.



Внутренний цилиндр подвешен на нити, а внешний может вращаться вокруг своей продольной оси с регулируемой угловой скоростью ω . Зазор между цилиндрами заполняется исследуемой жидкостью, в частности, кровью.

За счет вязкости жидкости при вращении наружного цилиндра внутренний цилиндр начинает поворачиваться, достигая равновесия при некотором угле поворота θ. Этот угол можно легко измерить.
Чем больше вязкость жидкости и угловая скорость вращения ω, тем больше и указанный угол поворота:

$$\theta = k\,\eta\,\omega$$

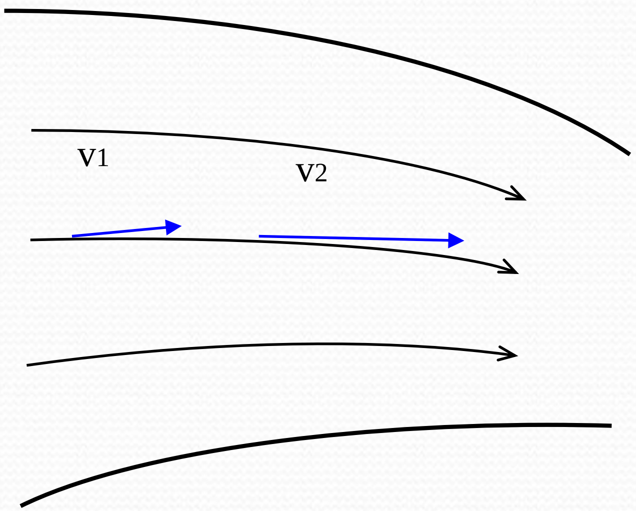
где k - постоянная прибора.

$$\eta = \frac{\theta}{k\omega}$$

2. Жидкости в движении

Опр. **Линиями тока** называются линии, к которым векторы скорости являются касательными.

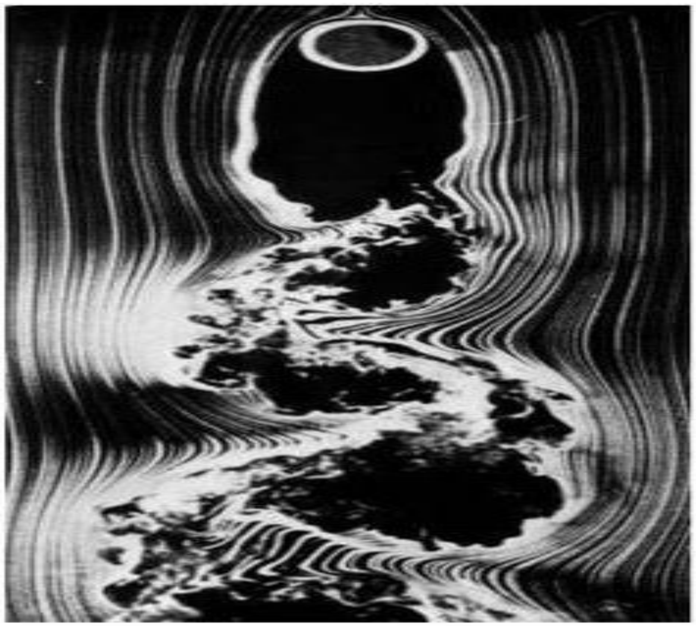
Густота линий тока пропорциональна скорости.

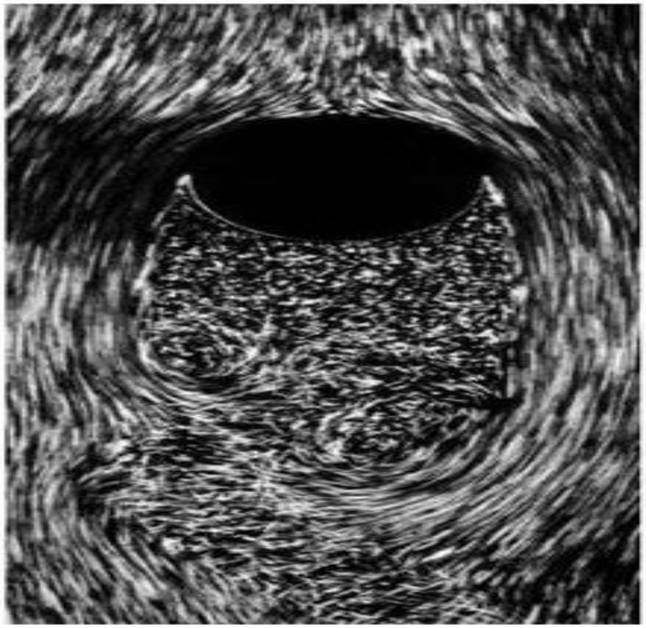


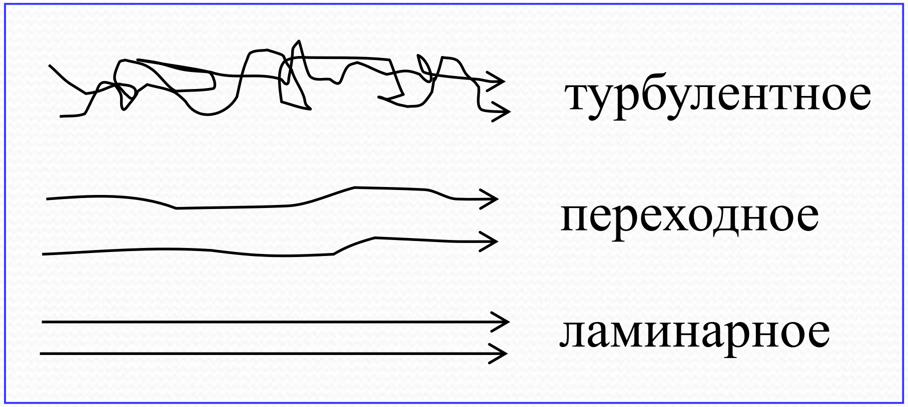
Линии тока в случае однородного потока изображаются прямыми и параллельными друг другу линиями.

Опр. Ламинарное течение – течение жидкости, при этом частицы жидкости движутся параллельно друг другу, а отдельные слои не смешиваются.

Опр. Турбулентное течение – течение, при котором наблюдается перемешивание слоев жидкости при ее движении.







Тип потока может быть определен с применением простого параметра - числа Рейнольдса:

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}}$$

$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ – ламинарное течение

$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ – турбулентное течение

$\mathrm{Re} \approx \mathrm{Re}_{кр}$ – переходное течение

где d – диаметр трубы, v – средняя скорость,
ρ – плотность жидкости, η – вязкость,
$\mathrm{Re}_{кр}$ – критическое значение коэффициента Рейнольдса

- Для трубы с круглым сечением при нормальных условиях критическое значение числа Рейнольдса равно

$$Re_{кр} = 2000..4000$$

- Таким образом:
  - $Re < 2000$: ламинарное течение
  - $2000 < Re < 4000$: переходное течение
  - $Re > 4000$: турбулентное течение

Опр. **Линейная скорость** - скорость перемещения самих частиц жидкости (или плывущих вместе с жидкостью мелких тел – например, эритроцитов в крови) обозначают υ и называют линейной скоростью.

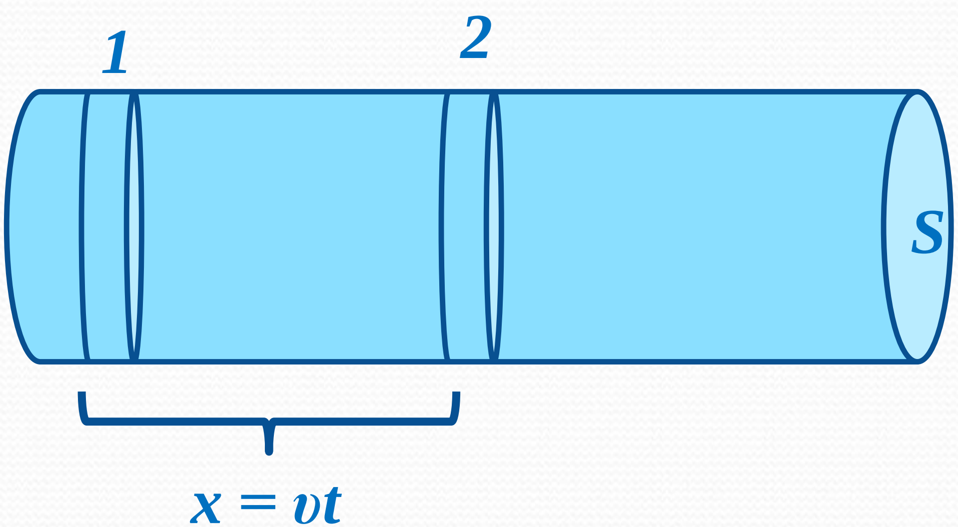
$$v = \frac{dx}{dt} \qquad v = [\text{м/с}]$$

Опр. **Объемная скорость** - объём V жидкости, протекающей через поперечное сечение данного потока (трубы, русла реки, кровеносного сосуда и т.п.) за единицу времени.

$$Q = \frac{dV}{dt} \qquad Q = [\text{м}^3/\text{с}]$$

Какова же связь между линейной υ и объемной скоростью Q?

Рассмотрим трубку с площадью поперечного сечения S.



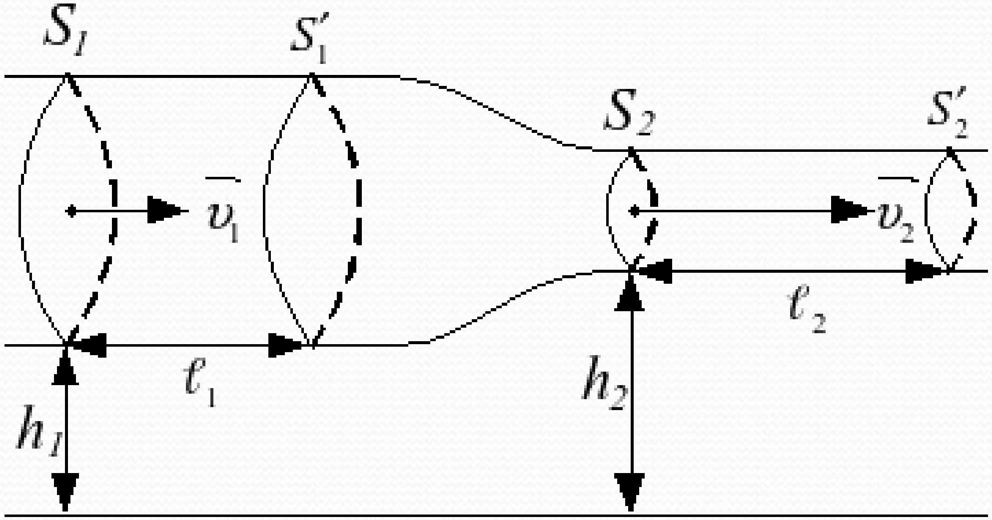
Через трубку пройдёт объём жидкости $V = Sx$

Т.к. $\frac{x}{t} = v$ и $Q = \frac{V}{t} = \frac{Sx}{t}$ поэтому: $Q = Sv$

Так как жидкость крайне **мало сжимаема**, то объем, протекающий за единицу времени через любое сечение трубки, одинаков, то есть **объемная скорость *Q* на протяжении всей трубки постоянна**.

Отсюда следует закон постоянства расхода жидкости ***(условие неразрывности струи)*:**

$$Q = S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 = \ldots = S_n\upsilon_n = const$$



Вывод:

1) если мы имеем дело с жесткой неразрывной трубой переменного сечения, то **линейная скорость** течения жидкости **тем больше**, **чем меньше сечение** трубы;

2) При заданной объемной скорости жидкости, изменение сечения приводит к пропорциональному изменению линейной скорости

3) В разветвленной трубке объемная скорость потока одинакова во всех суммарных поперечных сечениях.

Рассмотрим часто встречающийся случай **ламинарного движения жидкости** по трубке с круглым сечением **под действием разности давлений на её концах**.

Формула Ж.Л. Пуазейля позволяет рассчитать **объёмную скорость** течения жидкости по известным значениям радиуса трубки $\boldsymbol{r}$, её длины $\boldsymbol{L}$, вязкости жидкости $\boldsymbol{\eta}$ и разности давлений на концах трубки $\boldsymbol{p_1 - p_2}$.

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot (p_1 - p_2)$$

Выводы: объёмная скорость **прямо пропорциональна разности давлений** и **обратно пропорциональна вязкости**.

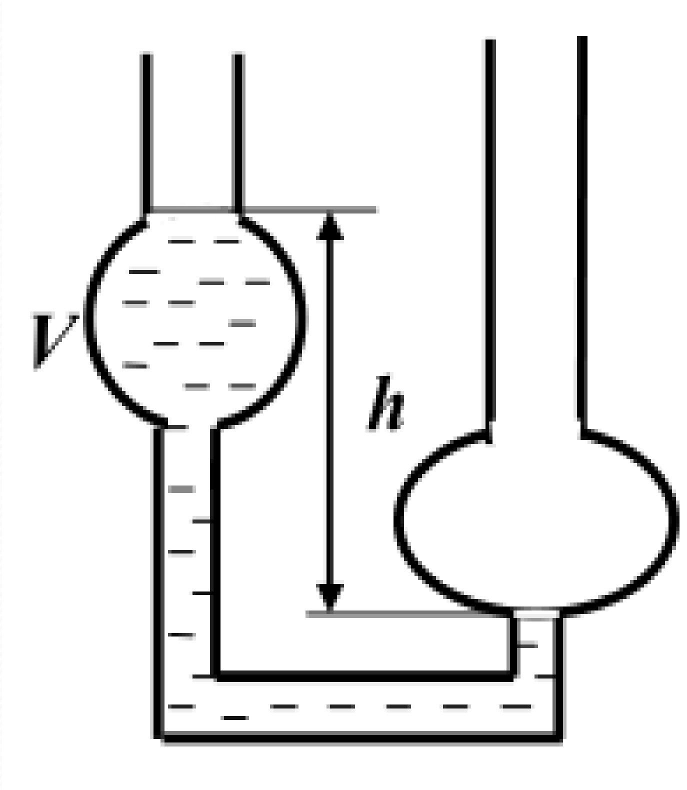
Обращает на себя внимание очень сильная зависимость объёмной скорости от радиуса:

$Q \sim r^4$.

8) Капиллярные методы

Капиллярные методы, основаны на применении формулы Ж.Л. Пуазейля. Рассмотрим течение жидкости через капилляр в вискозиметре В.Ф.Оствальда.

Представим U - образную трубку. В одном из ее плеч имеется небольшая полая сфера, объемом V, которая капилляром соединяется с резервуаром, расположенным в другом плече. Эта система заполняется жидкостью так, что разность ее уровней составляет величину h.



Пусть вначале вискозиметр заполнен эталонной жидкостью, вязкость которой точно известна. В качестве такой жидкости удобно использовать дистиллированную воду.

Поскольку при засасывании воды в левое плечо вискозиметра ее уровень здесь выше, чем в правом, то после прекращения всасывания жидкость будет перетекать через капилляр из левого плеча вискозиметра в правое до наступления равенства уровней. С помощью секундомера легко определить время t_o, за которое вода вытекает из полости объемом V.

Объем ***вытекшей*** воды равен:

$$V = \frac{\pi r^4 \rho_0 g h}{8\eta_0 L} t_0$$

Где

$\rho_o g h$ -разница давлений ,

ρ_o - плотность воды,

η_o - табличное значение вязкости воды при данной температуре.

Приравнивая правые части уравнений для объема ***вытекшей*** и ***исследуемой*** жидкости

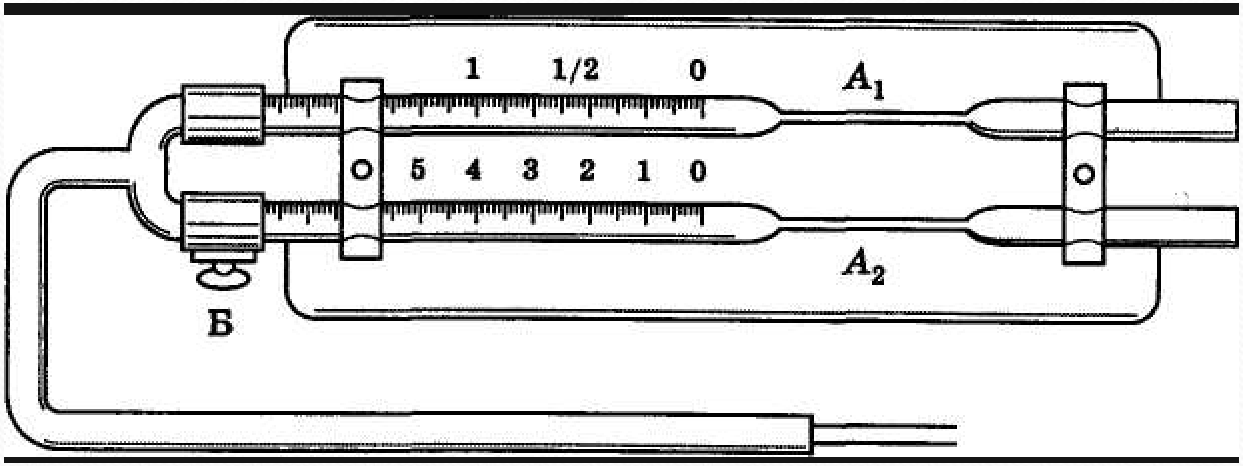
$$\frac{\pi r^4 \rho_0 g h}{8\eta_0 L} t_0 = \frac{\pi r^4 \rho g h}{8\eta L} t$$

получим формулу для определения вязкости исследуемой жидкости

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0}$$

Для определения вязкости проб крови может быть использован вискозиметр Р.Ф. Гесса, в котором определяются не времена истечения жидкости из капилляра, а расстояния L_0 и L, на которые перемещаются вода и кровь за одно и то же время. Применение формулы Ж.Л. Пуазейля для этого случая приводит к следующей расчетной формуле, определяющей вязкость крови η:

$$\eta = \eta_0 \frac{L_0}{L}$$



2.3. Гидродинамическое сопротивление.

Движение жидкости можно сравнить с **электрическим током** (движением электрических зарядов).

Запишем формулу Ж.Л. Пуазейля в таком виде:

$$p_1 - p_2 = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4} \cdot Q$$

и сравним её с формулой закона Г.С. Ома, написанной так: $\boldsymbol{U_1 - U_2 = R \cdot I}$.

Легко видеть, что между этими формулами существует аналогия.

Вывод:

величина равная $\frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}$ имеет смысл **сопротивления движению жидкости - гидродинамическое сопротивление.**

$$R_{ГД} = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}$$

Тогда формула Пуазейля: $\boldsymbol{p_1 - p_2 = R_{ГД}.Q}$

2.4. Течение идеальной жидкости. Теорема Д.Бернулли.

Опр. **Идеальная жидкость** – жидкость абсолютно несжимаемая и **не имеющая внутреннего трения** (вязкости).

Опр. **Установившееся течение (стационарное)** - такое течение, при котором характер движения жидкости не меняется (любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одним и тем же значением скорости).

Уравнение Д. Бернулли справедливо для стационарного движения идеальной несжимаемой жидкости - **закон сохранения механической энергии** для движущейся жидкости: **В потоке идеальной жидкости сумма статического, гидростатического и гидродинамического давлений есть величина постоянная.**

Динами-ческое давление

Гидроста-тическое давление

Статическое давление

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho g h + p = const$$

Спасибо за внимание!