Лекция 3.

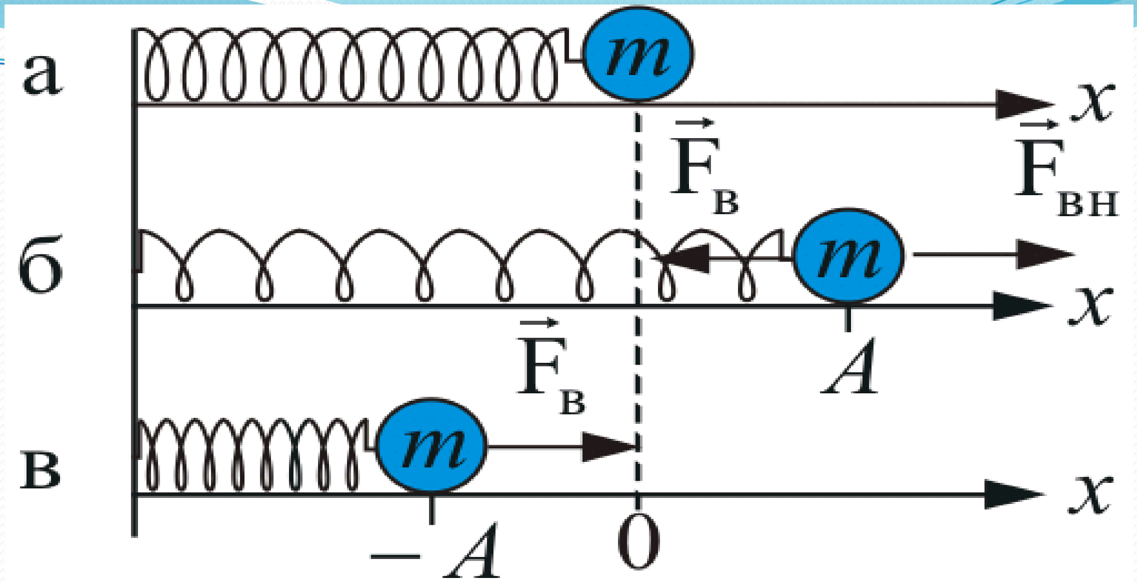
Тема 1. Механические колебания. Дифференциальные уравнения колебательного движения

3.1. Виды и признаки колебаний

В физике особенно выделяют колебания двух видов – механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека.

Опр. Колебательное движение (или просто колебание) – это движение, повторяющееся в течении времени и величины, описывающие его меняются на противоположные.

Пример. Колебания пружинного маятника



Закон Гука

$F_в = -kx$

x = 0 – положение равновесия;

$F_{вн}$ – внешняя растягивающая сила;

$F_в$ – возвращающая сила;

A – амплитуда колебаний.

k - жесткостью пружины.

Знак минус означает, что возвращающая сила, всегда противоположна направлению перемещения x

Из приведенного примера следуют *три признака колебательного движения:*

•***повторяемость*** (***периодичность***) *– движение по одной и той же траектории туда и обратно*;

•***ограниченность*** *пределами крайних положений*;

•***действие силы***, *описываемой функцией* $F = -kx$.

Опр. Периодические колебания – колебания, при которых наблюдается изменение значения физических величин, изменяющихся через равные промежутки времени.

$$\boxed{f(t) = f(t + nT)}$$

- Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые ***гармонические колебания.***
- Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, ***F = – kx***), совершает ***гармонические колебания.***
- Саму такую систему часто называют ***гармоническим осциллятором***.

Рассмотрение гармонических колебаний важно по **двум причинам:**

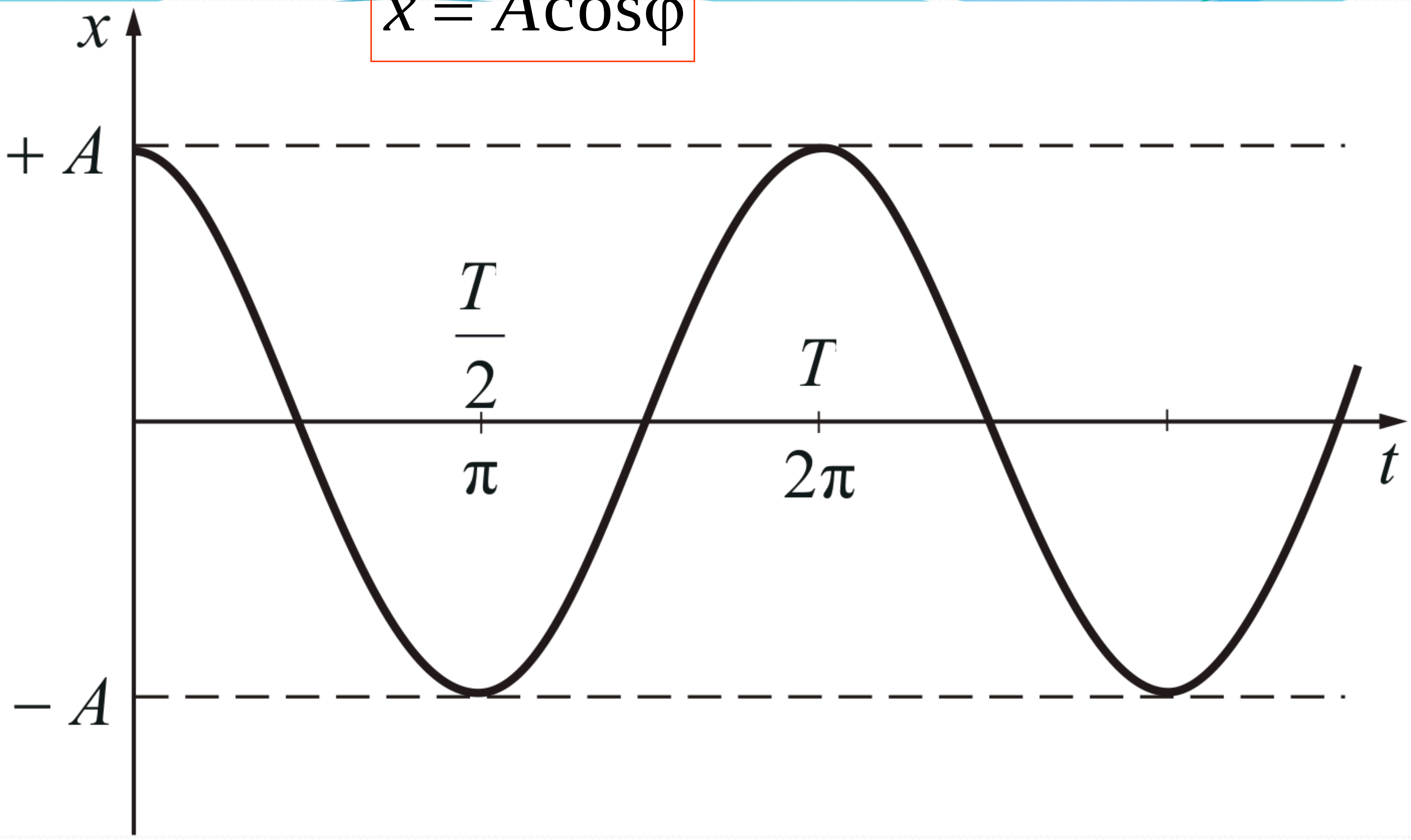
- колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, ***близкий к гармоническому***;
- различные ***периодические процессы*** (повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как ***наложение гармонических колебаний***.

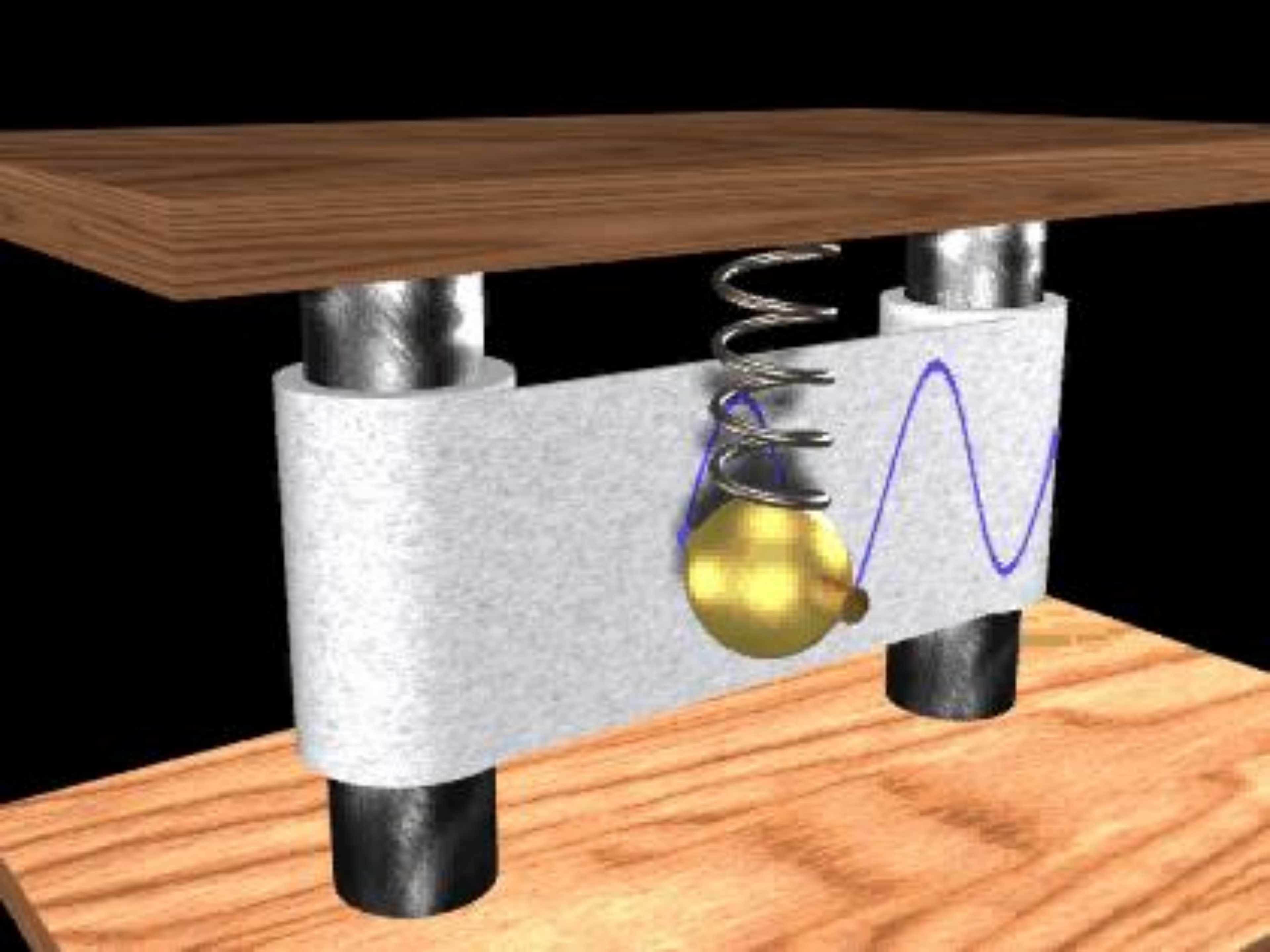
Опр. Гармонические колебания – колебания, описываемые законами синуса или косинуса называются

$$\boxed{x = A\cos\varphi} \quad \text{или} \quad \boxed{x = A\sin\varphi}$$

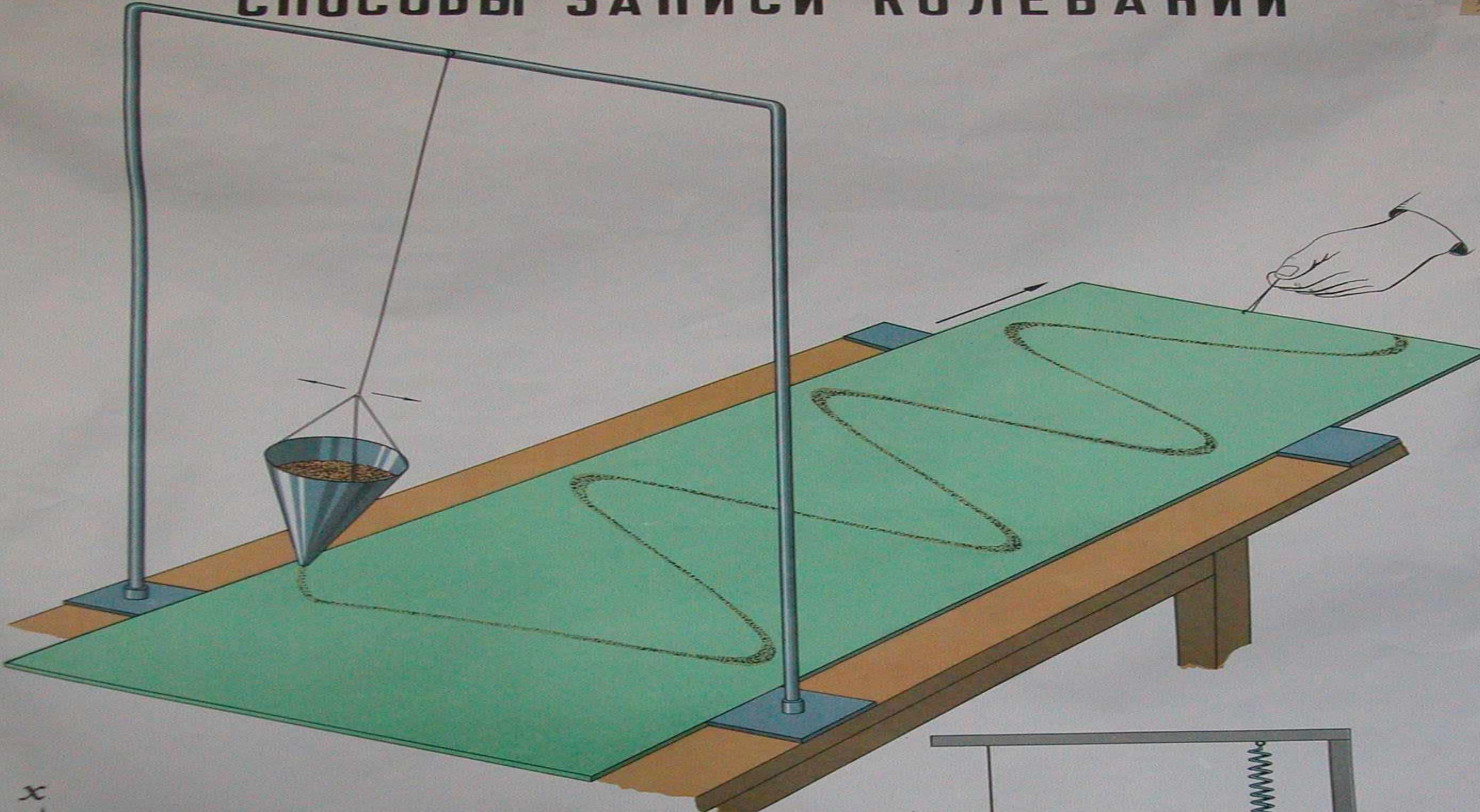
Здесь синус или косинус используются в зависимости от условия задачи, A и φ – параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.

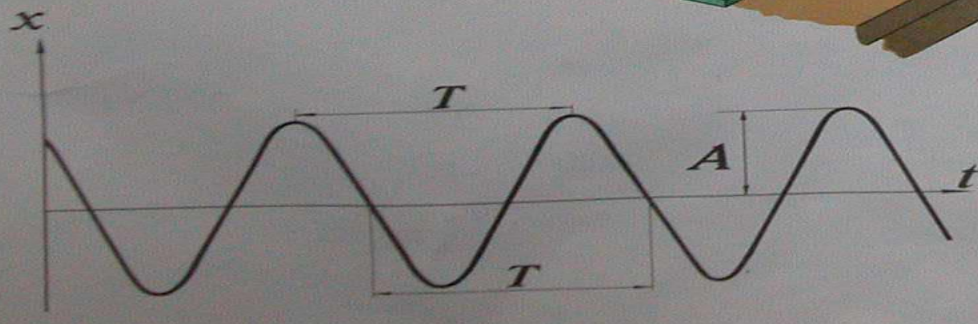
$$x = A\cos\varphi$$



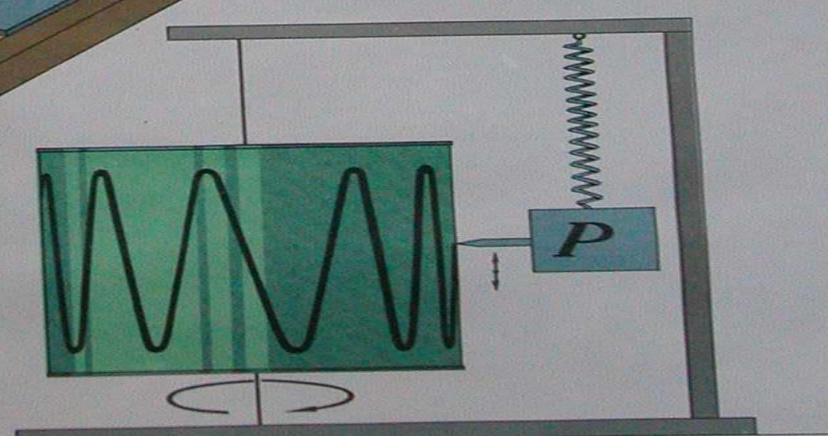


СПОСОБЫ ЗАПИСИ КОЛЕБАНИЙ





$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



1.2. Параметры гармонических колебаний

Опр. Смещение - расстояние колеблющегося тела от положения равновесия до точки, в которой находится груз в данный момент времени ($\boldsymbol{x}$).

Опр. Амплитуда - максимальное смещение – наибольшее расстояние от положения равновесия ($\boldsymbol{A}$).

Опр. Частота колебаний $\boldsymbol{\nu}$ определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, измеряют в герцах (Гц) или $с^{-1}$:
1 Гц = 1 колебание в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Опр. Период колебаний – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$$

Опр. **Циклическая (круговая) частота** – число полных колебаний за 2π секунд (ω_0).

$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

<u>Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды.</u>

Смещение описывается уравнением

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

тогда, по определению:

скорость $$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ускорение $$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

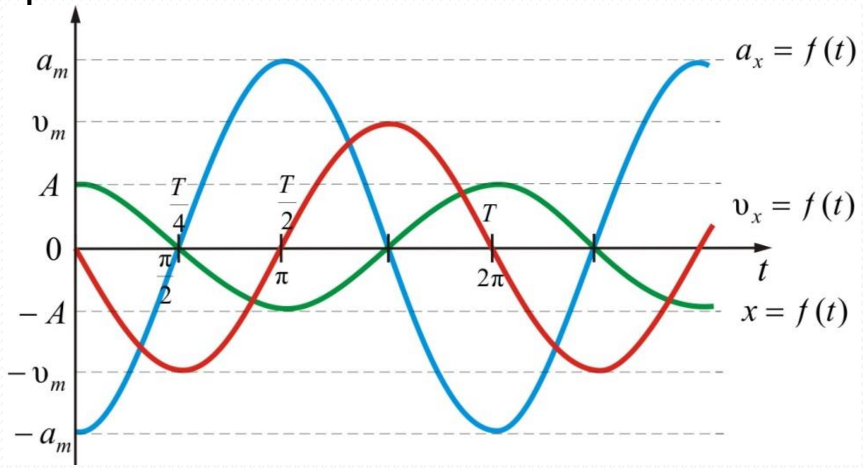
$\omega_0 A = \upsilon_m$ *– амплитуда скорости;*

$\omega_0^2 A = a_m$ *– амплитуда ускорения.*

1.3. Графики смещения, скорости и ускорения

Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$



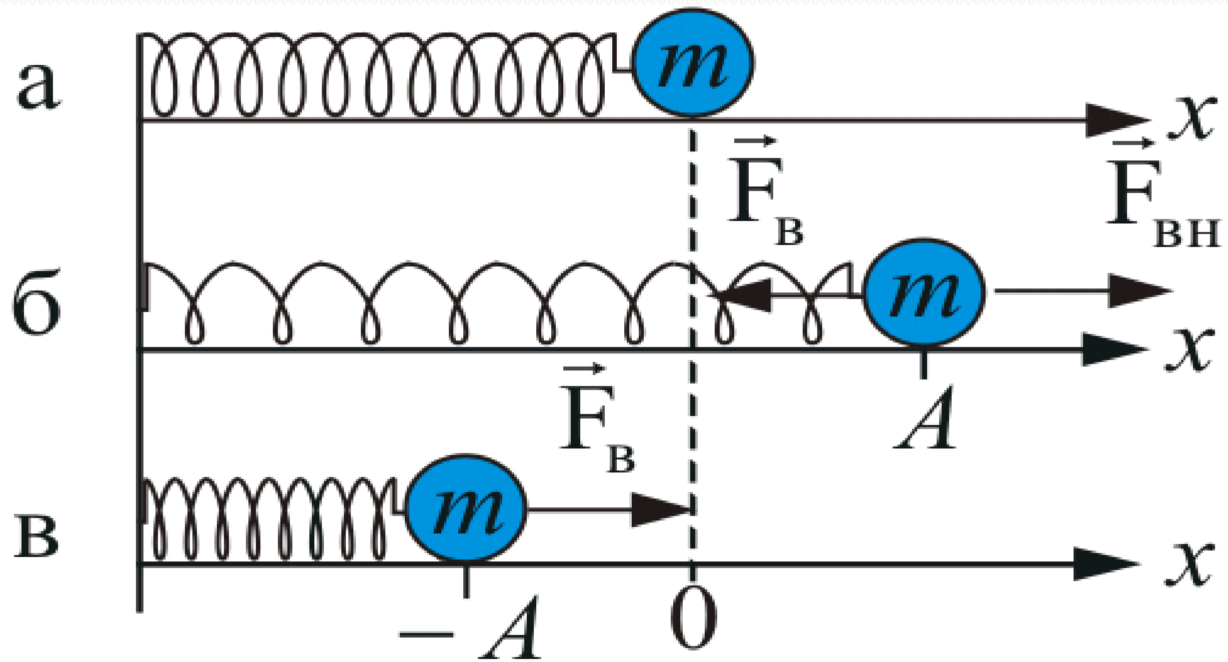
Выводы:

- скорость колебаний тела максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия ($x = 0$).

- При максимальном смещении ($x = \pm A$) скорость равна нулю.

- Ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.

1.4. Энергия гармонических колебаний



Потенциальная энергия тела U, *измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила*

$$F_x = -kx$$

•***Потенциальная энергия***

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

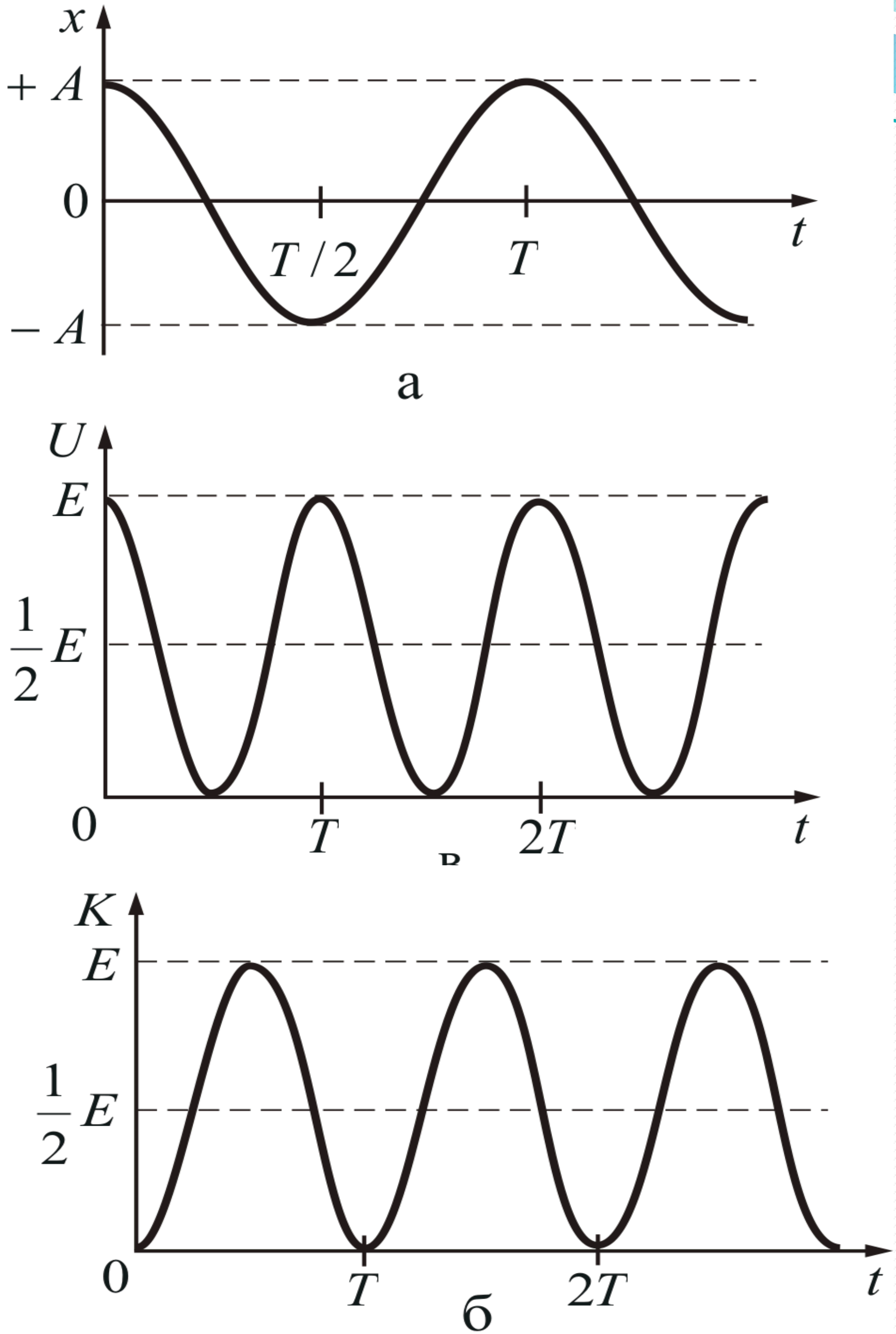
•***Кинетическая энергия***

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

• ***Полная энергия:***

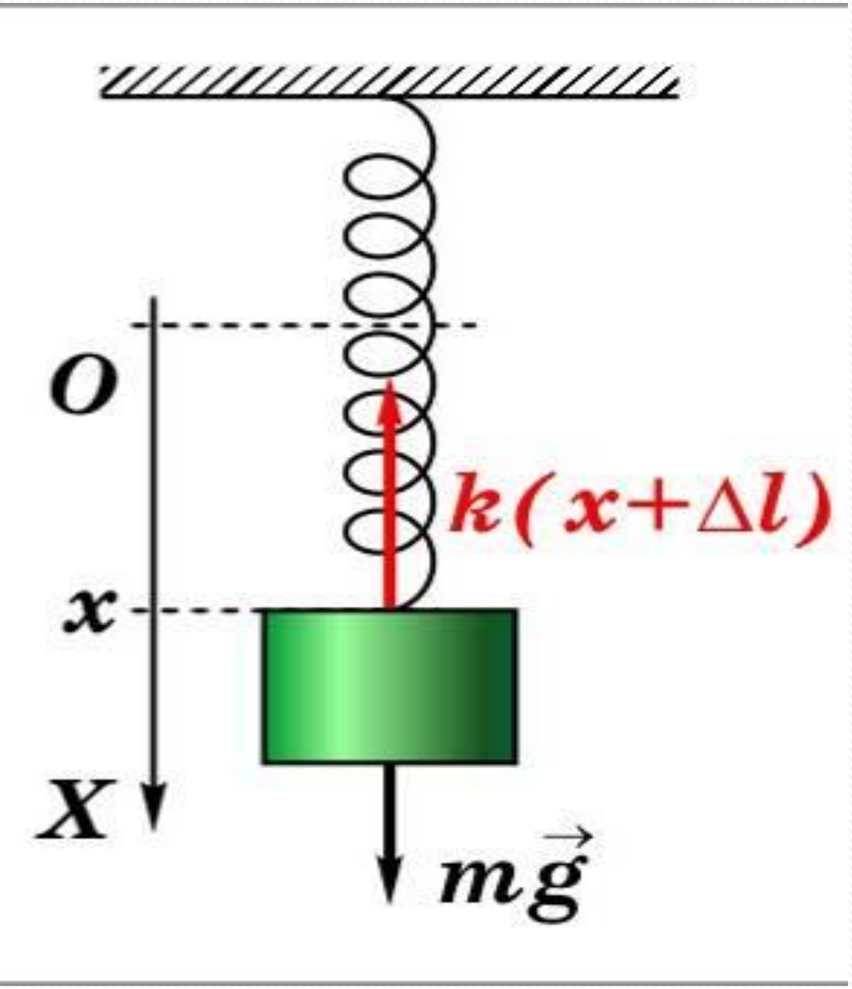
$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$ или $$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.



При колебаниях совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их ***сумма в любой момент времени постоянна.***

1.5. Гармонический осциллятор



1. ***Пружинный маятник*** – это груз массой *m*, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью *k*, совершающий гармонические колебания под действием *упругой силы*

$$F = -kx$$

Из второго закона Ньютона $F = ma$; или $F = - kx$ получим ***уравнение движения маятника***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

Решение этого уравнения – гармонические колебания вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Собственная циклическая частота гармонических незатухающих свободных колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

Период гармонических незатухающих свободных колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Вывод:

свободные незатухающие колебания описываются дифференциальным уравнением:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение данного уравнения – уравнение колебательного движения:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

1.6. Свободные затухающие механические колебания

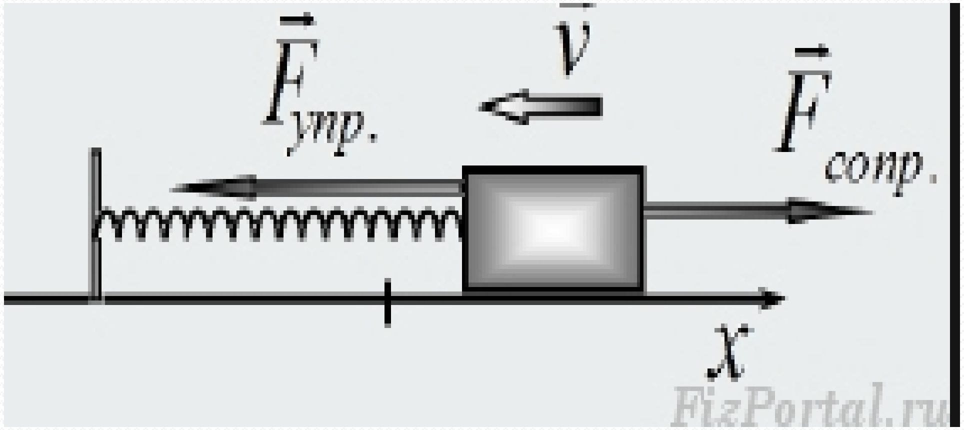
Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или *сопротивления*)

$$\boxed{\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon}}$$

где r – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения



Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси *x*:

$$\boxed{ma_x = -F_x - F_{тр.x}}$$

$$\boxed{ma_x = -kx - r\upsilon_x}$$

где kx – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\dfrac{r}{2m} = \beta$; $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$

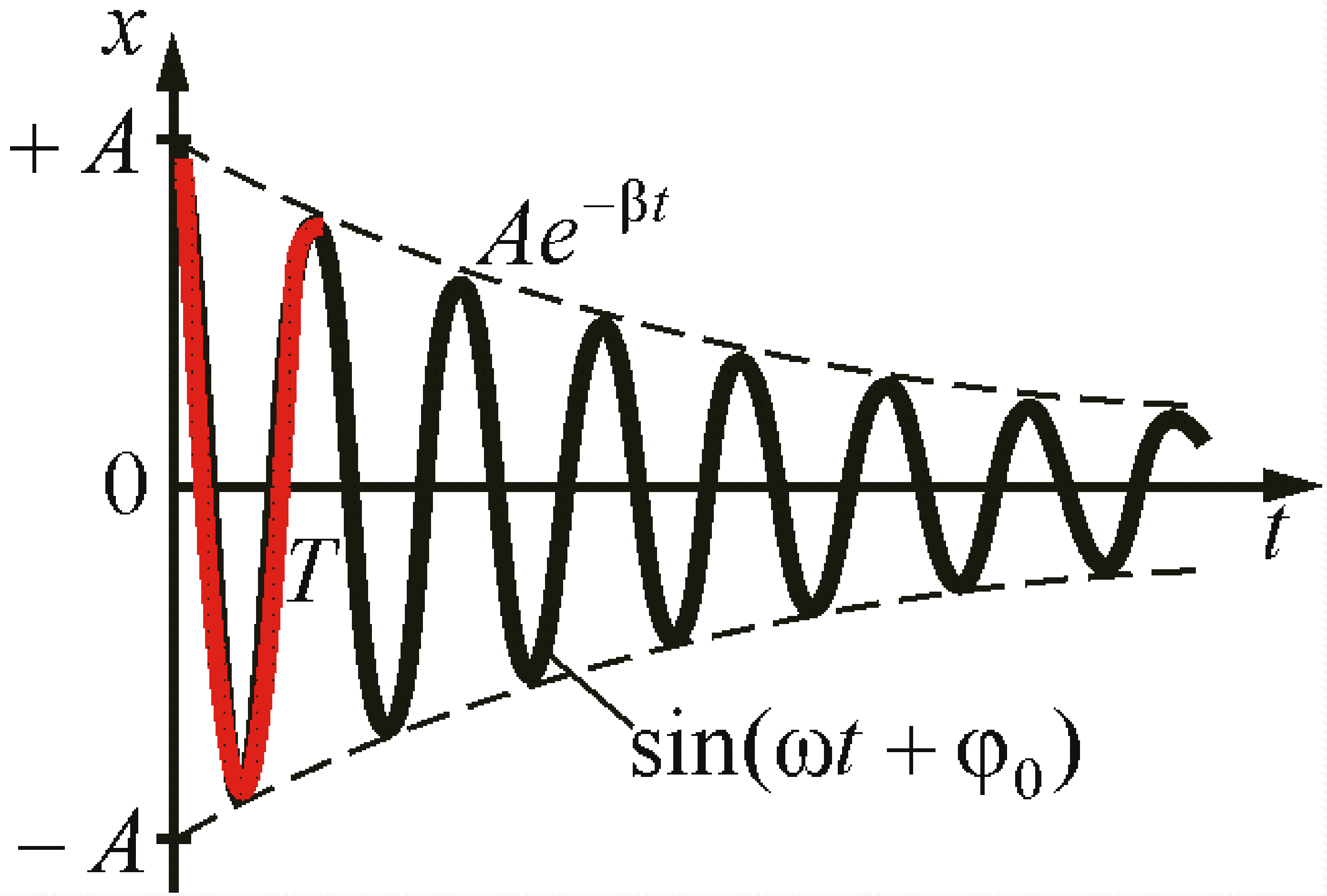
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение уравнения имеет вид $$\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)}$$

Частоту затухающих колебаний ω.

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad \beta \le \omega_0$$

Период затухающих колебаний $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$$



$$\chi = \beta T$$

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

$\omega = \omega_0 \quad A \to \infty$ **- явление резонанса**

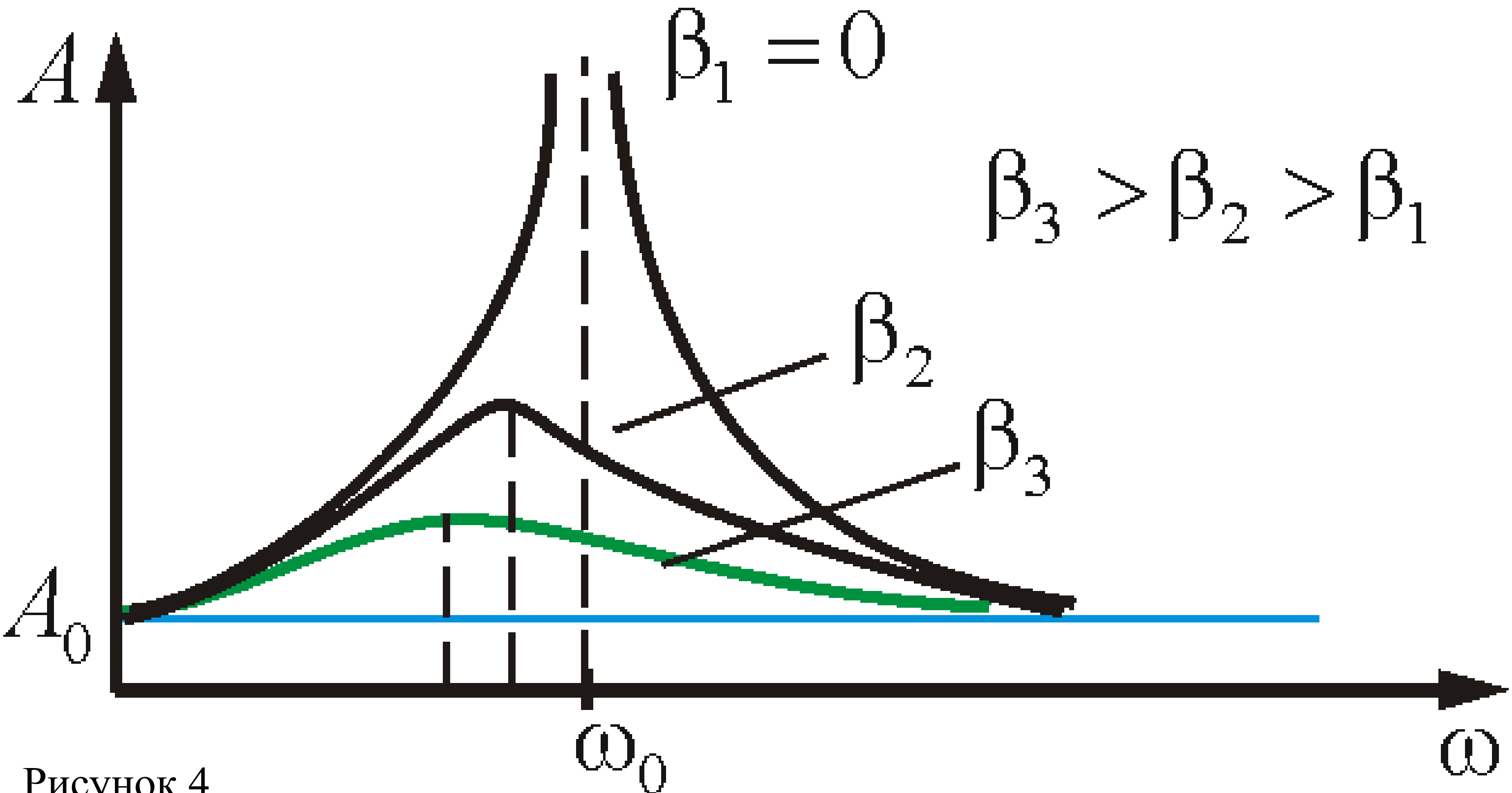


Рисунок 4

$$\boxed{\omega_{\text{ðåç}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$ – резонансная частота

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$ – резонансная частота.

Опр. Резонанс – физическое явление, при котором наблюдается возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний

Спасибо за внимание!