

# Лекция 4. «Вязкость жидкости. Основы гидромеханики»

## 4.1. Необходимы математические понятия

**Опр.** Градиентом физической величины называют - вектор, показывающий направление наибольшего возрастания скалярной функции, значение которой изменяется от одной точки пространства к другой.

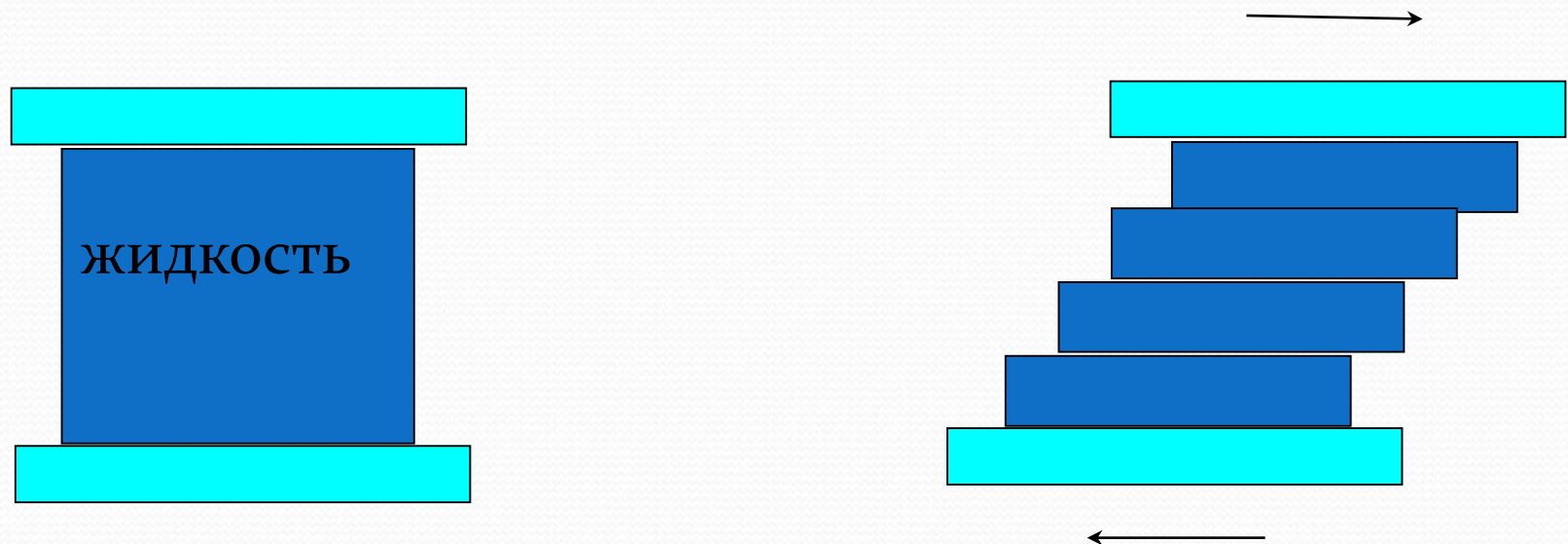
**Опр.** Градиентом физической величины называют скорость изменения этой величины в пространстве

$$\mathit{grad} Y = \frac{dY}{dx}$$

где  $Y$ - любая физическая величина,  $dY$  – изменение физической величины,  $x$  –пространственная координата,  $dx$ - изменение координаты, вдоль которой наблюдается изменение физической величины,  $\mathit{grad}Y$  – условное обозначение градиента

## 4.2. Свойства и характеристики жидкостей

1. В случае жидкостей в деформации принимают участие множество слоев, которые перемещаются один над другим. Смещение продолжается пока присутствует внешняя сила.



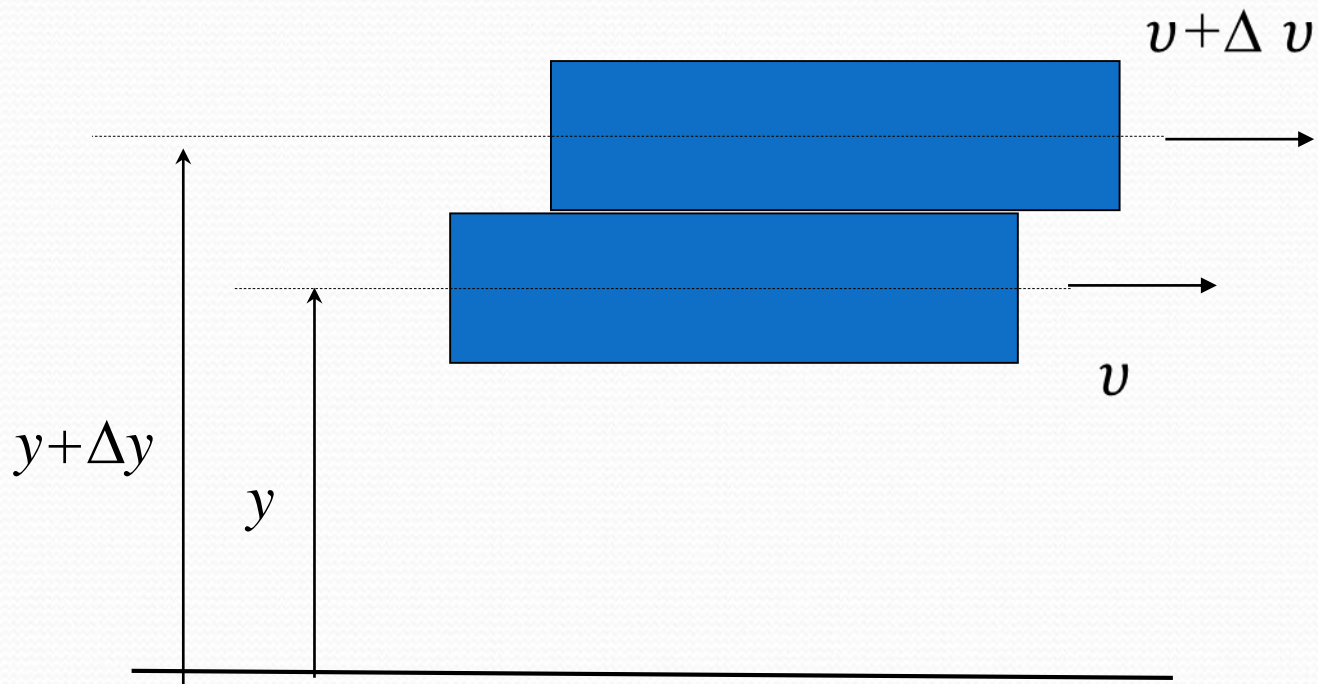
2. Жидкости проявляют сопротивление движению из-за своей вязкости, или, как ее еще называют, «внутреннего трения».

**Опр. Внутреннее трение (вязкость)** – трение слоев жидкости или газа, возникающее в следствии взаимодействия молекул, находящихся в соседних слоях жидкости, движущихся с разными скоростями относительно друг друга.

3. Слой жидкости, непосредственной прилегающий к неподвижной поверхности, имеет **нулевую скорость**. Это связано с тем, что молекулы жидкости взаимодействуют с молекулами твердого тела намного сильнее, чем друг с другом.

Рассмотрим два прилегающих друг к другу слоя жидкости, находящихся на высоте  $y$  и  $y + \Delta y$ , и имеющих скорости  $v$  и  $v + \Delta v$ .

Тогда можно говорить о градиенте скорости вдоль заданного направления, т.е.  $\text{grad } v = -\frac{dv}{dy}$



Ньютон предположил, что сдвигающая сила (между слоями) **пропорциональна** градиенту скорости, перпендикулярному к слоям, и **площади** соприкосновения смежных слоев жидкости:

$$F_{\text{тр.}} \sim \text{grad } v \sim \frac{dv}{dy} \qquad F_{\text{тр.}} = -\eta \frac{dv}{dy} S$$

**Опр. Вязкость** жидкости или динамическая вязкость ( $\eta$ ) – ф.в., численно равная силе вязкого трения, возникающей при движении жидкости или газа через единичную площадку, при градиенте скорости равном единице

# Единицы измерения динамической и статической вязкости

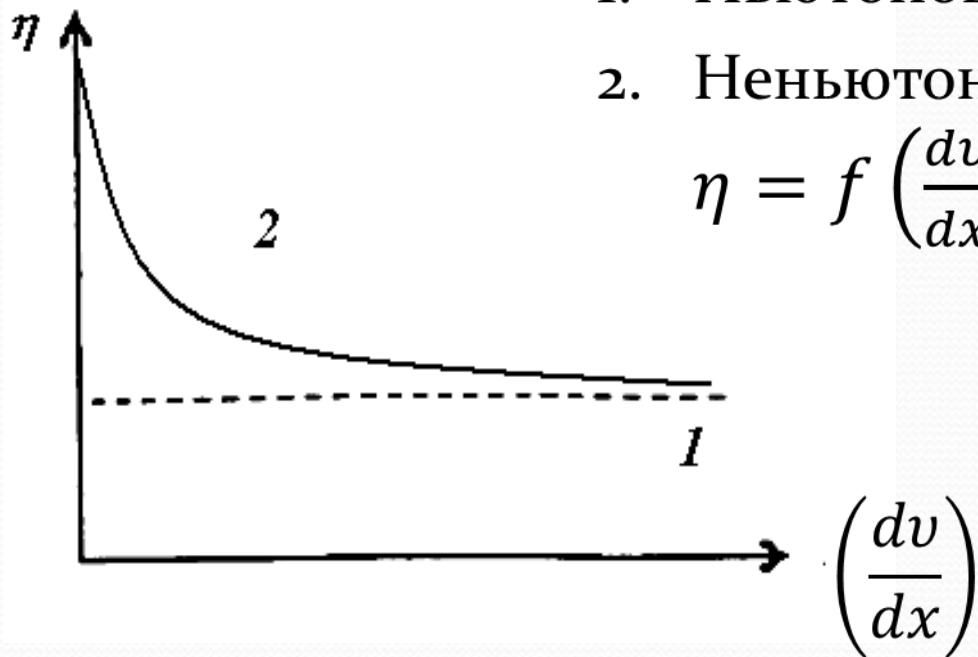
$$[\eta] = \left[ \frac{F}{\frac{dv}{dy} S} \right] = \left[ \frac{H}{\frac{м/с \cdot м^2}{м}} \right] = \left[ \frac{H}{м^2} \cdot с \right] = \left[ \frac{кг}{м \cdot с} \right] = [Па \cdot с]$$

4. Коэффициент вязкости зависит от физических свойств и строения жидкости. Большинство жидкостей подчиняются уравнению Ньютона (так называемые «**Ньютоновские жидкости**»).

**Опр. Ньютоновские жидкости** - жидкости, у которых значение вязкости не зависит от градиента скорости (следовательно и от величины  $\eta$ )

1. Ньютоновские жидкости  $\eta = const$
2. Неньютоновские жидкости

$$\eta = f\left(\frac{dv}{dx}\right)$$





Определение вязкости биологических жидкостей и, особенно, вязкости крови имеет существенное диагностическое значение.

Разнообразные приборы, применяемые для этой цели называют **вискозиметрами**.

Существуют следующие методы определения вязкости жидкости:

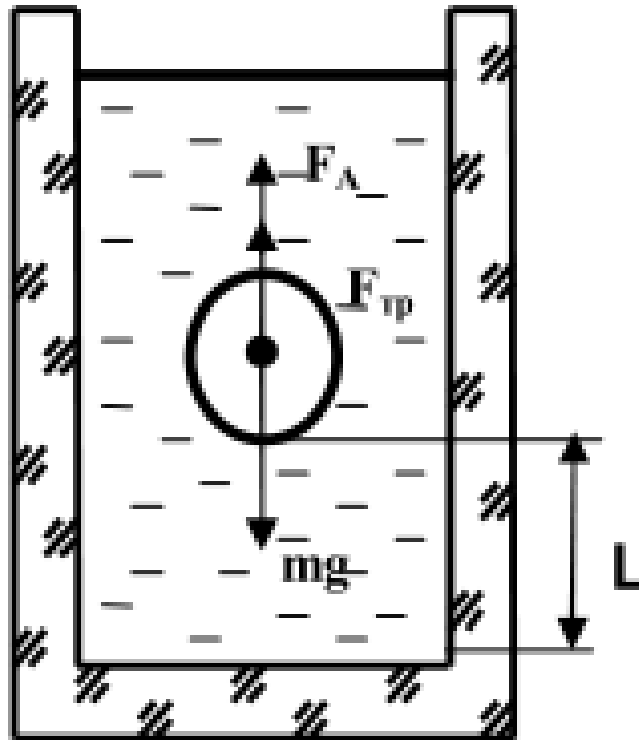
*а) Метод Дж. Стокса (метод падающего шарика).*

*б) Капиллярные методы*

*в) Ротационные методы*

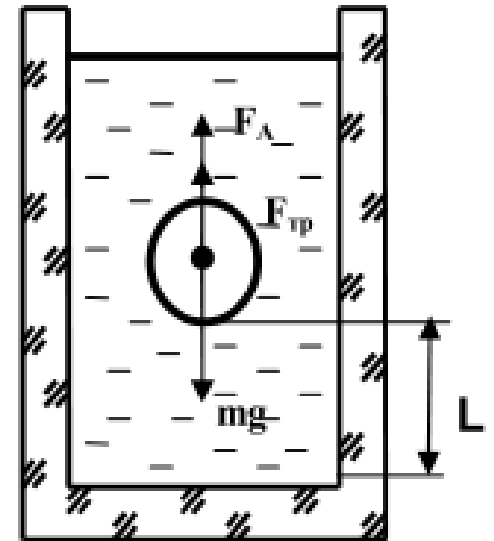
## а) Метод Дж. Стокса (метод падающего шарика)

Представим цилиндр, заполненный жидкостью плотностью  $\rho_{ж}$ , вязкостью которой  $\eta$  подлежит определению



Если в этой жидкости падает шарик радиусом  $r$ , массой  $m$  и плотностью  $\rho$ , то движение шарика определяется действующими на него тремя силами:

- силой тяжести  $F_T = mg$
- силой Архимеда  $F_A = \frac{4\pi r^3 \rho_{ж} g}{3}$
- силой трения  $F_{TP}$



Согласно *закону Дж. Стокса*, сила сопротивления движению шарика  $F_{TP}$  пропорциональна его радиусу, скорости движения и вязкости жидкости:

$$F_{TP} = 6\pi\eta r v$$

Сила трения уменьшает скорость движения шарика и через некоторое время после погружения шарика в жидкость его движение может стать равномерным.

При достижении равномерного движения сила тяжести становится равной сумме силы трения и силы Архимеда:

$$\frac{4\pi r^3 \rho g}{3} = \frac{4\pi r^3 \rho_{жс} g}{3} + 6\pi \eta r v$$

Отсюда определим искомую вязкость:

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_{жс})r^2 g}{9v}$$

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_{жс})r^2 g}{9\nu}$$

Скорость движения шарика  $\nu$  определяется экспериментально. Для этого измеряется время  $t$ , за которое шарик равномерно проходит в жидкости расстояние  $L$ :

$$\nu = \frac{L}{t}$$

Метод Дж. Стокса обладает хорошей точностью, однако, для определения вязкости крови он практически не применяется потому, что:

- требует значительного количества исследуемой крови.
- в жидкостях, обладающих не очень большой вязкостью, сложно удовлетворить требованию равномерности движения шарика.

**Опр. Неньютоновские жидкости** - жидкости, у которых значение вязкости зависит от градиента скорости (следовательно и от величины  $\eta$ ), зависимость можно не только наблюдать, но и определить количественно.

Таким образом, данные ротационной вискозиметрии позволяют судить об изменении вязкости движущейся крови при различных скоростях сдвига.

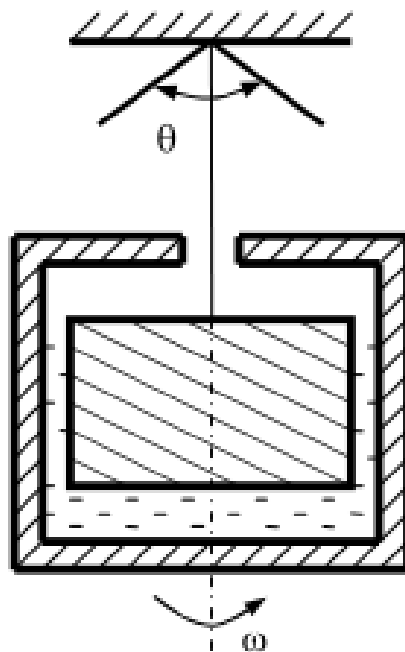
## **б) Ротационные методы**

Достоинством этих методов является возможность определять не только значение вязкости, но и ее зависимость от скорости сдвига:

$$\eta = f\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

Существуют разнообразные ротационные вискозиметры.

Рассмотрим принцип устройства одного из них.  
Представим два цилиндра, имеющих общую ось вращения.



Внутренний цилиндр подвешен на нити, а внешний может вращаться вокруг своей продольной оси с регулируемой угловой скоростью  $\omega$ . Зазор между цилиндрами заполняется исследуемой жидкостью, в частности, кровью.



За счет вязкости жидкости при вращении наружного цилиндра внутренний цилиндр начинает поворачиваться, достигая равновесия при некотором угле поворота  $\theta$ .

Этот угол можно легко измерить.

Чем больше вязкость жидкости и угловая скорость вращения  $\omega$ , тем больше и указанный угол поворота:

$$\theta = k \eta \omega$$

где  $k$  - постоянная прибора.

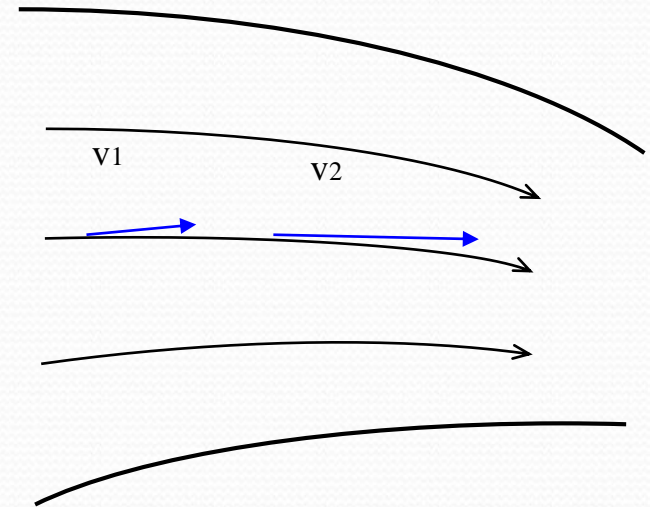
$$\eta = \frac{\theta}{k\omega}$$

## 4.3. Жидкости в движении

Опр. **Линиями тока** называются линии, к которым векторы скорости являются касательными.

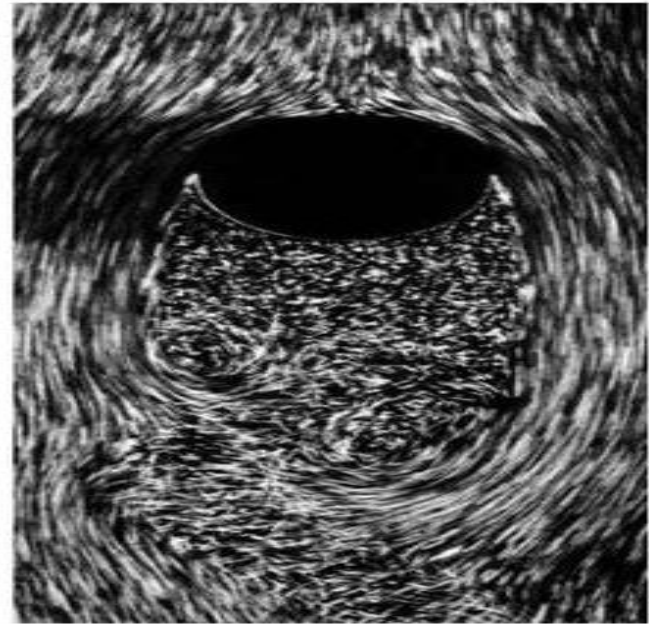
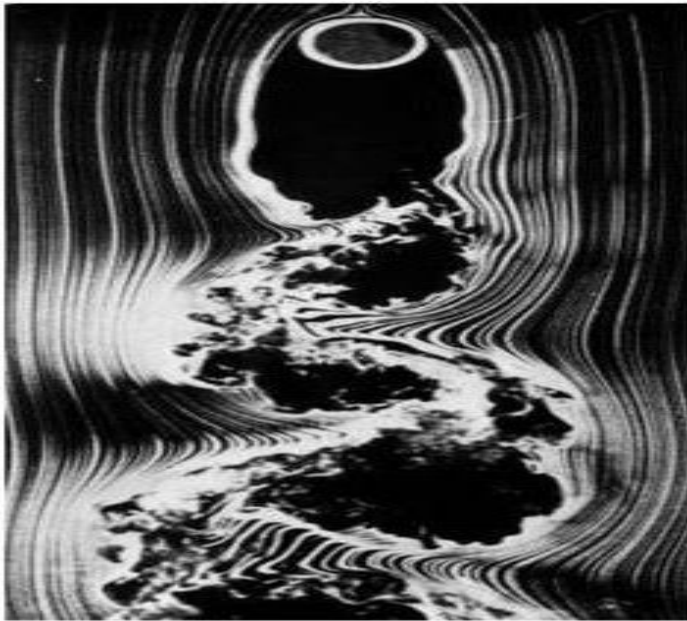
**Густота** линий тока пропорциональна **скорости**.

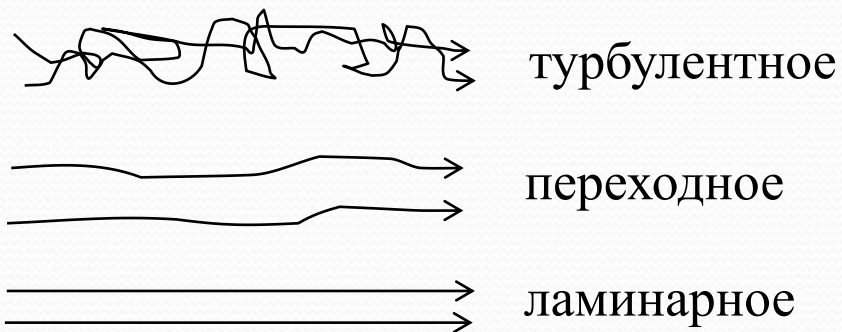
Линии тока в случае однородного потока изображаются **прямыми** и **параллельными** друг другу линиями.



**Опр. Ламинарное течение** – течение жидкости, при этом частицы жидкости движутся **параллельно** друг другу, а отдельные слои не смешиваются.

**Опр. Турбулентное течение** – течение, при котором наблюдается перемешивание слоев жидкости при ее движении.





Тип потока может быть определен с применением простого параметра - числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}$$

$Re < Re_{кр}$  – ламинарное течение

$Re > Re_{кр}$  – турбулентное течение

$Re \approx Re_{кр}$  – переходное течение

где  $d$  – диаметр трубы,  $v$  – средняя скорость,

$\rho$  – плотность жидкости,  $\eta$  – вязкость,

$Re_{кр}$  – критическое значение коэффициента Рейнольдса

- Для трубы с круглым сечением при нормальных условиях критическое значение числа Рейнольдса равно

$$Re_{кр} = 2000..4000$$

- Таким образом:
  - $Re < 2000$ : ламинарное течение
  - $2000 < Re < 4000$ : переходное течение
  - $Re > 4000$ : турбулентное течение

Опр. **Линейная скорость** - скорость перемещения самих частиц жидкости (или плывущих вместе с жидкостью мелких тел – например, эритроцитов в крови) обозначают  $v$  и называют линейной скоростью.

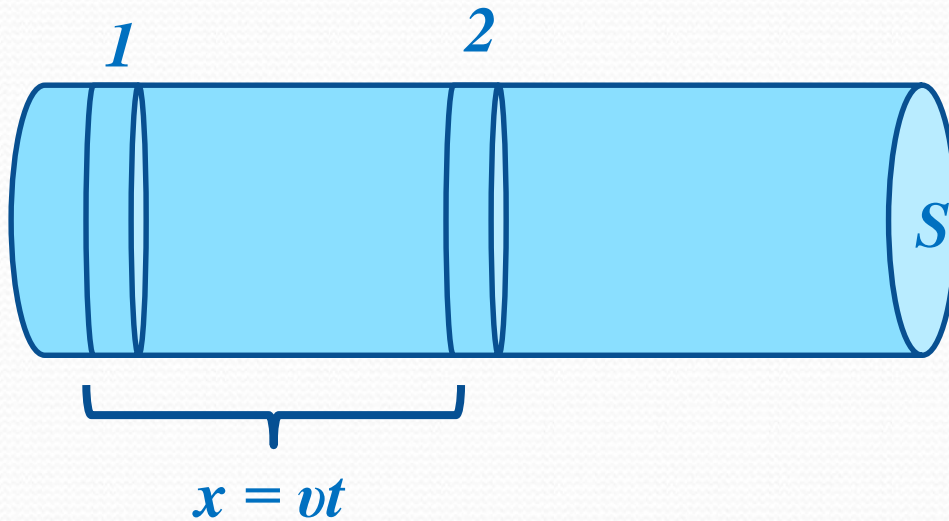
$$v = \frac{dx}{dt} \quad v = [\text{м/с}]$$

Опр. **Объемная скорость** - объём  $V$  жидкости, протекающей через поперечное сечение данного потока (трубы, русла реки, кровеносного сосуда и т.п.) за единицу времени.

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad Q = [\text{м}^3/\text{с}]$$

Какова же связь между линейной  $v$  и объемной скоростью  $Q$ ?

Рассмотрим трубку с площадью поперечного сечения  $S$ .



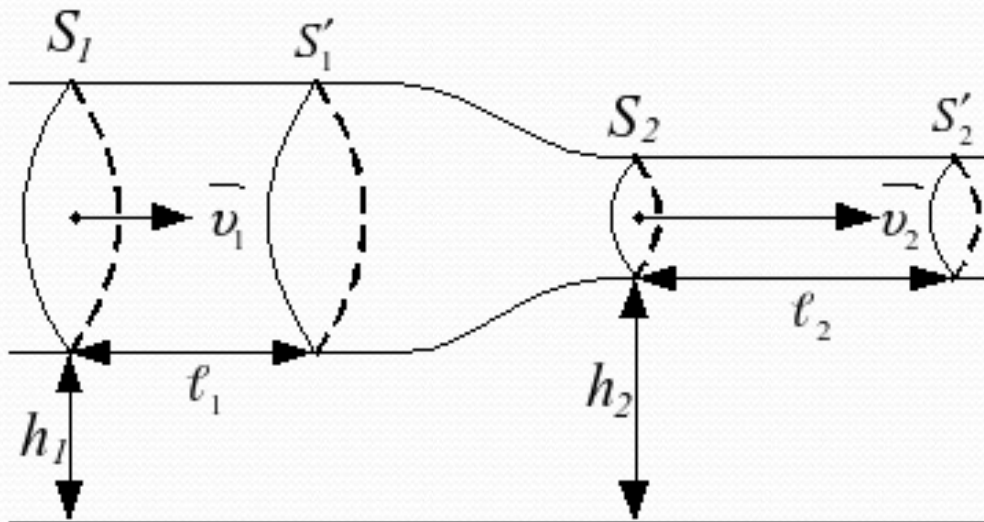
Через трубку пройдет объём жидкости  $V = Sx$

Т.к.  $\frac{x}{t} = v$  и  $Q = \frac{V}{t} = \frac{Sx}{t}$  поэтому:  $Q = Sv$

Так как жидкость крайне мало сжимаема, то объем, протекающий за единицу времени через любое сечение трубки, одинаков, то есть **объемная скорость  $Q$  на протяжении всей трубки постоянна.**

Отсюда следует закон постоянства расхода жидкости (*условие неразрывности струи*):

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \dots = S_n v_n = \text{const}$$





## Вывод:

- 1) если мы имеем дело с жесткой неразрывной трубой переменного сечения, то **линейная скорость** течения жидкости **тем больше, чем меньше сечение** трубы;
- 2) При заданной объемной скорости жидкости, изменение сечения приводит к пропорциональному изменению линейной скорости
- 3) В разветвленной трубке объемная скорость потока одинакова во всех суммарных поперечных сечениях.

Рассмотрим часто встречающийся случай ламинарного движения жидкости по трубке с круглым сечением под действием разности давлений на её концах.

Формула Ж.Л. Пуазейля позволяет рассчитать объёмную скорость течения жидкости по известным значениям радиуса трубки  $r$ , её длины  $L$ , вязкости жидкости  $\eta$  и разности давлений на концах трубки  $p_1 - p_2$ .

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot (p_1 - p_2)$$

**Выводы: объёмная скорость прямо пропорциональна разности давлений и обратно пропорциональна вязкости.**

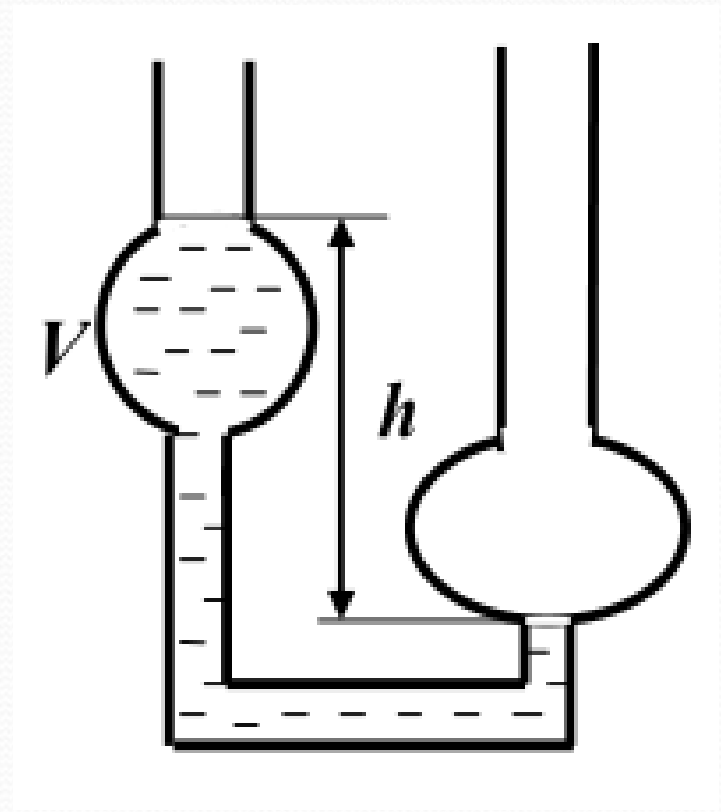
Обращает на себя внимание очень сильная зависимость объёмной скорости от радиуса:

$$Q \sim r^4.$$

## 8) Капиллярные методы

Капиллярные методы, основаны на применении формулы Ж.Л. Пуазейля. Рассмотрим течение жидкости через капилляр в вискозиметре В.Ф.Оствальда.

Представим U - образную трубку. В одном из ее плеч имеется небольшая полая сфера, объемом  $V$ , которая капилляром соединяется с резервуаром, расположенным в другом плече. Эта система заполняется жидкостью так, что разность ее уровней составляет величину  $h$ .



Пусть вначале вискозиметр заполнен эталонной жидкостью, вязкость которой точно известна. В качестве такой жидкости удобно использовать дистиллированную воду.

Поскольку при засасывании воды в левое плечо вискозиметра ее уровень здесь выше, чем в правом, то после прекращения всасывания жидкость будет перетекать через капилляр из левого плеча вискозиметра в правое до наступления равенства уровней. С помощью секундомера легко определить время  $t_0$ , за которое вода вытекает из полости объемом  $V$ .

Объем вытекшей воды равен:

$$V = \frac{\pi r^4 \rho_0 g h}{8 \eta_0 L} t_0$$

Где

$\rho_0 g h$  - разница давлений ,

$\rho_0$  - плотность воды,

$\eta_0$  - табличное значение вязкости воды при данной температуре.

Приравнивая правые части уравнений для объема вытекшей и исследуемой жидкости

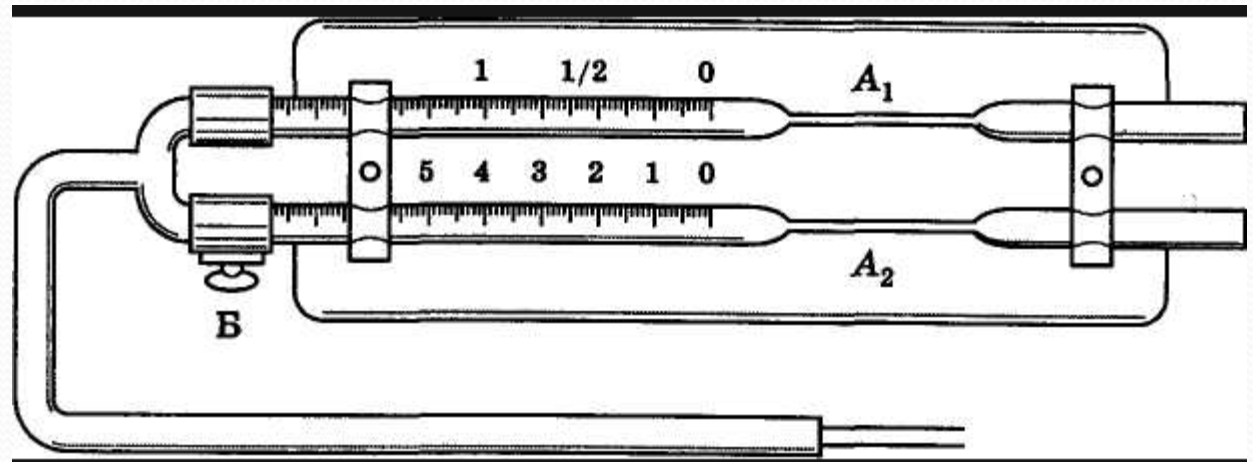
$$\frac{\pi r^4 \rho_0 g h}{8 \eta_0 L} t_0 = \frac{\pi r^4 \rho g h}{8 \eta L} t$$

получим формулу для определения вязкости исследуемой жидкости

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0}$$

Для определения вязкости проб крови может быть использован вискозиметр Р.Ф. Гесса, в котором определяются не времена истечения жидкости из капилляра, а расстояния  $L_0$  и  $L$ , на которые перемещаются вода и кровь за одно и то же время. Применение формулы Ж.Л. Пуазейля для этого случая приводит к следующей расчетной формуле, определяющей вязкость крови  $\eta$ :

$$\eta = \eta_0 \frac{L_0}{L}$$





## 4.4. Гидродинамическое сопротивление.

Движение жидкости можно сравнить с **электрическим током** (движением электрических зарядов).

Запишем формулу Ж.Л. Пуазейля в таком виде:

$$p_1 - p_2 = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4} \cdot Q$$

и сравним её с формулой закона Г.С. Ома, написанной так:  $U_1 - U_2 = R \cdot I$ .

Легко видеть, что между этими формулами существует аналогия.

**Вывод:**

величина равная  $\frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}$  имеет смысл  
**сопротивления движению жидкости -  
гидродинамическое сопротивление.**

$$R_{\text{ГД}} = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}$$

Тогда формула Пуазейля:  $p_1 - p_2 = R_{\text{ГД}} \cdot Q$

## 4.5. Течение идеальной жидкости.

### Теорема Д.Бернулли.

Опр. **Идеальная жидкость** – жидкость абсолютно несжимаемая и **не имеющая внутреннего трения** (вязкости).

Опр. **Установившееся течение (стационарное)** - такое течение, при котором характер движения жидкости не меняется (любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одним и тем же значением скорости).

Уравнение Д. Бернулли справедливо для стационарного движения идеальной несжимаемой жидкости - закон сохранения механической энергии для движущейся жидкости: В потоке идеальной жидкости сумма статического, гидростатического и гидродинамического давлений есть величина постоянная.

The diagram shows the Bernoulli equation with three terms, each connected by a blue line to a corresponding label in a box:

- The first term,  $\frac{\rho V^2}{2}$ , is connected to a box labeled "Динамическое давление" (Dynamic pressure).
- The second term,  $\rho g h$ , is connected to a box labeled "Гидростатическое давление" (Hydrostatic pressure).
- The third term,  $p$ , is connected to a box labeled "Статическое давление" (Static pressure).

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho g h + p = const$$



Спасибо за внимание!